様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 １９ 日現在

機関番号：３４５２８
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４０１０２

研究課題名（和文）例外リー群とその旗多様体のＭｏｒａｖａ　Ｋ－理論

研究課題名（英文）Morava K-theory of the exceptional Lie group and flag manifold

研究代表者
西本　哲（Nishimoto, Tetsu）

神戸医療福祉大学・社会福祉学部・准教授

研究者番号：８０３３０５２０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,600,000円

研究成果の概要（和文）：ファイバー束の性質を知るための方法として特性類を計算することがある.ファイバー束の中で最も重要なのが普遍束であり，その特性類を決定することは構造群の分類空間のコホモロジーを計算することにあたる.それを計算するための道具としてスペクトル系列があり，今回は例外リー群E_7，E_8の分類空間のmod 3コホモロジーへ収束するスペクトル系列のE_2-項の代数構造を計算した.それから分類空間のコホモロジーと密接に関係している，Weyl群の極大トーラスの分類空間のmod 3コホモロジーへの作用による不変式環をE_7の場合に計算した.

研究成果の概要（英文）：In order to know the property of the fibre bundle, there is a way to calculate the characteristic classes. The most important fibre bundle is the universal bundle, and to determine its characteristic classes is equivalent to calculate the cohomology of the classifying space of the structure group. The spectral sequence is the tool to calculate the cohomology of the classifying space. This time, I calulated the E_2-term of the spectral sequence convergence to the mod 3 cohomology of the classifying spaces of the exceptional Lie groups E_7 and E_8. Moreover, I calculated the invariant ring of the Weyl group of E_7 which acts on the mod 3 cohomology of the classifying space of the maximal torus.

研究分野：代数的位相幾何学

キーワード：トポロジー　リー群

１．研究開始当初の背景

(1) コンパクト連結リー群 G の部分群として最も重要なのが極大トーラス T である．Weyl 群 W(G)は自然に極大トーラス T に作用しており，そこから極大トーラスの分類空間のコホモロジー$H^*(BT)$への作用が誘導される．この作用による不変式環 $H^*(BT)^{W(G)}$はコンパクト連結リー群 G の分類空間 BG のコホモロジー$H^*(BG)$と深く関係している．良い条件の場合，$H^*(BG)$と $H^*(BT)^{W(G)}$が同型となったり，$H^*(BT)^{W(G)}$の生成元により生成される$H^*(BT)$のイデアルによる商環が旗多様体のコホモロジー$H^*(G/T)$と同型になったりする．ただし，リー群に p-torsion が存在するとこれらのことは成り立たない．そのため p-torsion が存在する場合において,旗多様体の常コホモロジーの研究が長年行われてきた．例外リー群の旗多様体については,
H. Toda and T. Watanabe, The integral cohomology ring of F_4/T and E_6/T
M. Nakagawa, The integral cohomology ring of E_7/T
M. Nakagawa, The integral cohomology ring of E_8/T
などにより，整係数コホモロジーの環構造が決定されている．

(2) リー群の体係数常コホモロジ―のホップ代数構造も昔から行われてきており、コンパクト単純リー群の場合は全て決定されている.リー群 G の Morava K-理論 $K(n)^*(G)$の加群構造についてはAtiyah-Hirzebruchスペクトル系列を計算することにより，ほとんどの場合知られている．ホップ代数構造については$K(n)^*(G)$へ収束するAtiyah-Hirzebruchスペクトル系列が自明な場合や，G が単連結リー群の場合の$K(1)^*(G)$の場合は計算されている．コンパクト単連結例外リー群の場合は 2 つの論文
M. Mimura and T. Nishimoto, Hopf algebra structure of Morava K-theory of the exceptional Lie groups
T. Nishimoto, Hopf algebra structure of Morava K-theory of the exceptional Lie groups, II
において Morava K-理論のホップ代数構造をほとんど計算したが，Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列が自明でない場合で n=1 でない場合は決定されていない．

２．研究の目的

(1)例外リー群の旗多様体の Morava K-理論や p-局所な connective Morava K-理論（係数環は $Z_{(p)}[v_n]$）の環構造を計算し，そのホモトピー論的な性質を調べる．

(2) 旗多様体の connective Morava K-理論の構造を用いて決定されていない場合の例外リー群の Morava K-理論（係数環は $Z/p[v_n,v_n^{-1}]$）の Hopf 代数構造を計算し，そのホモトピー論的な性質を調べていく．

(3) スペクトル系列を用いて例外リー群の分類空間の Morava K-理論の代数構造を計算し，そのホモトピー論的な性質を調べていく．

３．研究の方法

コンパクト連結リー群を G とし，その極大トーラスを T とする．旗多様体 G/T の有理係数コホモロジー環から整係数のコホモロジー環の生成元となる元を見つけて整係数のコホモロジー環の構造を決定したように，旗多様体の p-局所な connective Morava K-理論を有理数体で局所化したもの（本質的には有理係数のコホモロジーと同じものになる）から p-局所な connective Morava K-理論の生成元を見つけていく．そのためには p-局所な connective Morava K-理論の形式群の構造を用いて極大トーラスの分類空間のコホモロジーへの Weyl 群の作用を調べていく必要がある．旗多様体は G の極大トーラスの分類空間 BT から G の分類空間 BG への写像のファイバーとなっているので，旗多様体のコホモロジーは BT と BG のコホモロジーに深く関係している．BG の Morava K-理論のコホモロジーを計算するには BG の Z/p 係数の常コホモロジーの結果から Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列を用いて計算する方法やリー群 G の Morava K-理論の Hopf 代数構造の結果から Rothenberg-Steenrod スペクトル系列を用いて計算する方法がある.例外リー群 G の分類空間 BG の常コホモロジーは G の常コホモロジーの Hopf 代数構造がわかっているので Rothenberg-Steenrod スペクトル系列を用いたり，BT のコホモロジー環の Weyl 群不変な部分環を計算することなどにより，計算していく．例外リー群 G の Morava K-理論の Hopf 代数構造は，ほとんどの場合はわかっているが，Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列が自明でない場合に分かっていないところがあるので，旗多様体のコホモロジーの情報から
K.Ishitoya, A. Kono and H. Toda, Hopf algebra structure ofmod 2 cohomology of simple Lie groups
の手法を用いて Hopf 代数構造を決定していく．

４．研究成果

(1) リー群 G の分類空間 BG の mod p コホモロジーを計算するために，そのコホモロジーに収束する Rothenberg-Steenrod スペクトル系列を用いる方法がある．例外リー群 E_6，E_7，E_8の場合の mod 3 コホモロジーに関しては，

M. Mimura and Y. Sambe, On the cohomology mod p of the classifying spaces of the exceptional Lie groups, I, II, III

において Rothenberg-Steenrod スペクトル系列の E_2-項に関して部分的な結果，生成元の構成などが得られていた．

M. Mimura, Y. Sambe and M. Tezuka, Cohomology mod 3 of the classifying space of the exceptional Lie group E_6, I : structure of Cotor

において E_6の場合の E_2-項の代数構造が決定されている．今回，E_7と E_8の場合の E_2-項を計算するための twisted tensor product を用いたチェイン複体にフィルトレーションを入れ，E_2-項に収束するスペクトル系列を構成し，そのスペクトル系列の E_∞-項を計算した．その結果，Rothenberg-Steenrod スペクトル系列の E_2-項の加群構造がわかり，関係式も全てチェックすることで E_2-項の代数構造を決定することができた．M. Mimura and Y. Sambe の論文の中で E_7の場合の E_2-項の非分解元とされていた元のいくつかが分解元であることを以前に指摘したことがあるが，今回の E_7 の場合の結果により残りの非分解元は全て非分解元であることを確認し，それ以外に非分解元が存在しないことを示した．E_8の場合，M. Mimura and Y. Sambe の論文での非分解元は全て非分解元であることを確認し，それ以外に存在しないことも確認した．E_7の分類空間のmod3コホモロジーに収束する Rothenberg-Steenrod スペクトル系列は自明になることが知られており，今回の結果で E_7の分類空間の mod 3 コホモロジーの加群構造が決定できたことになる．E_8の場合は，論文

M. Kameko and M. Mimura, On the Rothenberg-Steenrod spectral sequence for the mod 3 cohomology of the classifying space of the exceptional Lie group E_8

によると，E_8の分類空間の mod 3 コホモロジーに収束する Rothenberg-Steenrod スペクトル系列のE_2-項にある 108 次元の元はE_∞-項に生き残らないので，スペクトル系列が自明でないことがわかっている．このことにより，スペクトル系列の微分を計算して E_∞-項を決定する必要がある．

(2) コンパクト連結リー群 G の極大トーラス T の分類空間 BT のコホモロジーにはリー群 G の Weyl 群 W(G)が作用しており，その不変式環はリー群 G の分類空間 BG のコホモロジー環と密接に結びついている．

M. Mimur, Y. Sambe and M. Tezuka, Cohomology mod 3 of the classifying space of the exceptional Lie group E_6, II : The Weyl group invariants

において E_6の場合の Weyl 群の不変式環が決定されている．今回は例外リー群 E_7 の場合の Weyl 群の不変式環の代数構造を数式処理システム Singular を用いて計算した．それから，E_7 の複素 56 次元表現から誘導される Chern 類を Weyl 群の不変式環に引き戻したものも同様に Singular を用いて計算した．E_7の場合，Rothenberg-Steenrod スペクトル系列の結果と Weyl 群による不変式環の結果を比べると，分類空間の mod 3 コホモロジーから Weyl 群の不変式環への写像は全射であることが予想される．

(3) 今後は E_7の Weyl 群の不変式環へのコホモロジー作用素の作用がどのようになっているかを決定することが重要である．それが決定できれば，E_7の分類空間の mod 3 コホモロジーの関係式，複素 56 次元表現から誘導される Chern 類，コホモロジー作用素の作用を次数の低いほうからそれらを組み合わせながら計算していく．更に non-toral な Elementary abelian 3-group の分類空間への Weyl 群の作用による不変式環などの情報を用いながら E_7の分類空間の mod 3 コホモロジーを決定いくことになる．計算量が多いのでコンピューターを用いて計算していくことになるが，必要だと思われるプログラムはすでに作成してあるので，時間をかけていけば，E_7の場合は計算できると思われる．E_8についても同様のことを行うつもりであるが，計算量が E_7 に比べるとかなり膨大になることが予想され，かなり時間がかかりそうである．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　0 件）

〔学会発表〕（計　2 件）

2014 年 3 月 24 日　春の代数的位相幾何学セミナー（岡山大学）数式処理システム Singular を使ったコホモロジーの計算

2015 年 3 月 13 日　九州大学トポロジー金曜セミナー（九州大学）例外リー群 E_7の分類空間の mod 3 コホモロジーの計算について

〔図書〕（計　0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0 件）

○取得状況（計　0 件）

〔その他〕

ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者

西本　哲（NISHIMOTO, Tetsu）
神戸医療福祉大学・社会福祉学部・准教授
研究者番号：80330520

(3)連携研究者
三村　護（MIMURA, Mamoru）
岡山大学・名誉教授
研究者番号：70026772

中川　征樹（NAKAGAWA, Masaki）
岡山大学・教育学研究科・准教授
研究者番号：50370036