

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 3 日現在

機関番号：11401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540107

研究課題名(和文) 逐次標本抽出法の高次漸近特性について

研究課題名(英文) On asymptotic higher-order properties of sequential sampling methods

研究代表者

宇野 力 (UNO, Chikara)

秋田大学・教育文化学部・教授

研究者番号：20282155

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：統計的推定問題の中には、固定された大きさの標本では解決できないものがある。これらの問題に対しては、標本の大きさを確率的に定める逐次標本抽出法を用いることによって解決できる。本研究では、2回に分けてデータを抽出する二段階法という手法の漸近的性質について調べた。分散の値の下限情報がある場合に、その情報を標本抽出の手順に組み入れた手法を考え、漸近的な有効性について研究した。幅一定の信頼区間を構成する問題では、区間幅が小さくなると、被覆確率が信頼水準 $1 - \alpha$ に収束する速さについて、より高次の漸近理論を構築できた。

研究成果の概要(英文)：There are some statistical estimation problems for which no procedures of fixed sample size are available. For these problems, we can solve them by means of sequential sampling methods where the sizes of sample are random variables. In this research, we investigated asymptotic properties of two-stage procedures in which the samples are taken twice. When the lower bound for the variance is known, we inserted the known lower bound into the two-stage procedure and researched its asymptotic efficiency. For the problem of constructing fixed-width confidence interval, we established higher-order asymptotic theory on the rate of convergence of the coverage probability to the confidence level $1 - \alpha$ as the width tends to zero.

研究分野：統計数学

キーワード：逐次解析 二段階法 漸近有効性 停止時間

1. 研究開始当初の背景

統計的推定問題の中には、固定された大きさの標本では解決できないものがあり、そのような問題を解決するために逐次標本抽出法が用いられる。逐次標本抽出法では、標本の大きさ N は確率変数となる。代表的な逐次標本抽出法としては、標本抽出を2回に分けて行う Stein (1945) の二段階法、標本抽出をもう1回増やして3回に分けて行う Hall (1981) の三段階法、さらにはデータを1つずつとってきめ細かく判断する純逐次法がある。二段階法の利点としては、手法の簡便さがあげられ、生物・医学分野など多方面で応用されている。逐次標本抽出法の良さの基準として、2次の漸近有効性というものがある。これは、期待標本数 $E(N)$ と最適標本数の差が漸近的に有限な値になるという性質である。正規母集団の母平均に対する幅一定の信頼区間を構成する問題では、Stein の二段階法では、区間幅が小さくなる時、 $E(N)$ と最適標本数との差が無限大に発散してしまい、2次の漸近有効性をもたないことが知られている。

実社会の現実問題においては、推測対象母集団の母分散は未知であっても、それまでのデータの蓄積等から、その下限の値はわかる場合がある。Mukhopadhyay and Duggan (1997) は未知な分散の下限が既知であるとき、この情報を組み入れた二段階法を提案し、その手法が2次の漸近有効性をもつことを示した。その後、Isogai, Kobayashi and Uno (2011) は、Mukhopadhyay and Duggan (1997) の二段階法に対するより高次の漸近有効性についての結果を示したが、漸近展開式の中にまだ評価しきれていない項が存在していた。この点を克服するため、本研究課題を着想するに至った。

2. 研究の目的

本研究課題の申請時における当初の研究目的は次のとおりである。

(1) 逐次推定問題において、未知な分散の下限が既知であるとき、この情報を組み入れた二段階法に対して、2次の漸近有効性をさらに精密化した3次の漸近有効性に関する理論を確立することを目的とする。固定幅の区間推定問題における被覆確率や逐次点推定問題におけるリスクの高次漸近展開式についても調べる。いくつかの二標本問題に対する理論研究を行う。

(2) Hall (1981) の三段階法は、Stein の二段階法に比べて、標本抽出の回数をもう1回増やす手法であり、三段階法では分散の下限情報なしでも2次の漸近有効性が成り立つことが知られている。この三段階法に対して3

次の漸近有効性がいえるかどうかを調べることを目的とする。

3. 研究の方法

研究期間の4年間において、以下のように研究を進めた。

(1) 本研究は統計数学の基礎理論を構築するものであるが、研究が全く見当外れの展開となることを防止するために、ある程度理論構築できた段階で疑似乱数によるコンピューター・シミュレーションを導入した。このため、研究開始2年目から山口祥司氏に研究分担者となっていただき、シミュレーションのためのコンピューター・プログラムの作成に協力を仰いだ。これにより、その後の研究を進めるうえでの基盤を築いた。

(2) 研究期間のおおむね前半を通して上記の研究目的の(1)に記載した問題に取り組み、その成果を国内外の学会で講演発表し、論文にまとめて発表するという方法で研究を進めた。研究期間の後半では上記の研究目的の(2)に関する基礎理論の研究を進めた。

4. 研究成果

(1) 指数分布の尺度母数の点推定において、損失関数として二乗誤差と線形費用の和を用いる最小リスク問題について研究した。尺度母数に関する既知な下限の情報があるとき、この情報を組み込んだ二段階法によって推定した。この手法は Mukhopadhyay and Duggan (2001) の先行研究において提案されたものである。提案した手法の期待損失と推定する母数の値が既知の場合の理想リスクとの差をリグレット(regret)と呼び、これが提案手法の評価基準となる。標本抽出費用が小さくなる時、Mukhopadhyay and Duggan (2001) はリグレットの漸近的な上限と下限を示した。本研究では、この手法のリグレットに対する2次近似式を示した。この成果は Mukhopadhyay and Duggan (2001) の結果より精密なリグレットの評価式を与えたものである。また、逐次推定量のバイアス修正を行うと、リスクを標本抽出費用1個分小さくできることも示した。この理論はコンピューター・シミュレーションの結果とも合致している。これらの成果を、以下記載の学会発表で講演発表し、雑誌論文にまとめた。

(2) 正規母集団の母平均に対する幅一定の信頼区間を構成する問題において、未知な分散の下限が既知であるとき、この情報を取り入れた二段階法を Mukhopadhyay and Duggan (1997) は提案し、区間幅が小さくなる時、構成した信頼区間の被覆確率と期待標本数

について調べている。その結果は Aoshima and Takada (2000) によって期待標本数と被覆確率の 2 次近似式として精密化された。さらに、Isogai, Uno and Takeuchi (2012) は期待標本数と被覆確率のより高次の漸近展開式を示した。しかし、Isogai, Uno and Takeuchi (2012) の被覆確率に対する漸近展開式の中には、まだ評価しきれていない項が含まれていた。本研究では、漸近独立性という性質について理論構築し、評価しきれていなかった項に対する評価を示し、被覆確率に対する漸近展開式を完全な形で示したことにより、世界的にみてこの分野に大きく貢献した。この成果は以下記載の雑誌論文 で発表している。

(3) Mukhopadhyay and Duggan (1999) は局外母数の既知な下限の情報を二段階法に組み入れて、ある逐次推定問題のクラスに対して二段階法の 2 次の漸近特性を調べた。以下記載の雑誌論文 では Mukhopadhyay and Duggan (1999) の結果をより精密化した。有界リスク問題のリスクの漸近展開式や固定幅の区間推定問題の被覆確率の漸近展開式の中にはまだ評価しきれていない項が残っていた。それで、本研究ではさらに、以下の雑誌論文 の結果を Mukhopadhyay and Duggan (1999) で扱っている逐次推定問題のクラスへ拡張して、評価しきれていなかった項を精密に評価した。これにより、この逐次推定問題のクラスに対して統一的に二段階法の高次の漸近理論を確立することに貢献できた。これらの成果は、以下記載の学会発表 で講演発表し、雑誌論文 にまとめた。扱ったクラスの中には、複数の正規母集団の中から最大平均をもつ母集団を選び出すという多標本問題も含まれている。

(4) 未知な位置母数と尺度母数をもつ負の指数分布に関する二標本問題において、第一母集団の位置母数 μ と第二母集団の位置母数の線形結合 $= a\mu + b$ に対する固定幅の区間推定問題を研究した。この a と b は二つの位置母数の差や二つの位置母数の中点などを表すパラメーターである。信頼区間の被覆確率が $1 - \alpha$ 以上となる最適な標本の大きさは、二つの尺度母数が絡み合って明示的には表しにくい。三段階法を構成することができた。 a と b が異符号の場合には Mukhopadhyay and Padmanabhan (1993) の状況に帰着させることで 2 次の漸近有効性がいえるが、当初予期していなかったこととして、 a と b が同符号の場合の漸近的性質を示すにはいくつかの補題整備が必要であることがわかり、今後の展望が得られた。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 5 件)

Chikara Uno; Asymptotic theory for a two-stage procedure in sequential interval estimation of a normal mean, *Statistics and Probability Letters*, Vol.83, No.5, 2013, pp.1420-1423, 査読有, DOI: 10.1016/j.spl.2013.02.007

Chikara Uno; A note on asymptotic higher-order properties of a two-stage estimation procedure, *京都大学数理解析研究所講究録*, 1860 巻, 2013, pp.33-41, 査読無, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1860-03.pdf>

Eiichi Isogai and Chikara Uno; Minimum risk point estimation for the normal variance by a two-stage procedure and second-order properties, *Journal of Statistics: Advances in Theory and Applications*, Vol.9, No. 1, 2013, pp. 55-72, 査読有, <http://www.scientificadvances.co.in/abstract/4/112/619>

Chikara Uno and Eiichi Isogai; Asymptotic properties of a two-stage procedure and their applications, *Far East Journal of Theoretical Statistics*, Vol.40, No.2, 2012, pp.75-105, 査読有, <http://www.pphmj.com/abstract/7090.htm>

Eiichi Isogai and Chikara Uno; On second-order approximations to the risk in estimating the exponential mean by a two-stage procedure, *International Journal of Statistics and Probability*, Vol.1, No.2, 2012, pp.47-55, 査読有, DOI: 10.5539/ijsp.v1n2p47

〔学会発表〕(計 2 件)

宇野力; 二段階推定法の高次漸近特性に関する一考察, RIMS 共同研究「Asymptotic Expansions for Various Models and Their Related Topics」(研究代表者 赤平昌文), 2013 年 3 月 4 日, 京都大学数理解析研究所

Eiichi Isogai and Chikara Uno; A two-stage procedure for minimum risk point estimation of the mean of an exponential distribution and second-order results, 8th World Congress in Probability and Statistics, July 10, 2012, Istanbul, Turkey

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

宇野 力 (UNO, Chikara)

様 式 C - 19、F - 19、Z - 19 (共通)

秋田大学・教育文化学部・教授
研究者番号：20282155

(2)研究分担者

山口 祥司 (YAMAGUCHI, Yoshikazu)
秋田大学・教育文化学部・准教授
研究者番号：30534044
(平成25年5月27日より研究分担者)