

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 4 月 27 日現在

機関番号：11501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540108

研究課題名(和文) 特異性の解を持つ偏微分方程式に関する数値解法の研究の新展開

研究課題名(英文) New Development of Numerical Methods for Partial Differential Equations with Singularities

研究代表者

方 青 (FANG, QING)

山形大学・理学部・教授

研究者番号：10243544

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：自然・社会現象に関する研究分野において、特異性の解をもつ偏微分方程式は数理モデルとして頻りに現れる。工学、金融学など各分野の発展にも極めて重要な研究テーマである。本研究では、研究代表者は研究協力者たちの協力を得て、1次元非線形2点境界値問題の高次精度の有限差分スキームを提案しその収束解析を行い、成果を得た。また、2次元空間の中の多角形領域や円盤における特異性の解をもつ放物型偏微分方程式の初期値境界値問題について、有限差分スキームの高次精度をその数値解析を行うことにより数学的に示した成果を得た。

研究成果の概要(英文)：Mathematical models in partial differential equations with singularities have been used frequently in studies of natural phenomena and social phenomena. They are important research themes for the development of every fields in engineering and financial engineering and so on. In this research project, the representative proposed a higher-order finite difference scheme for nonlinear two-point boundary value problems. The representative also made progresses in the study of numerical solutions of initial-boundary value problems of parabolic equations on two dimensional spatial domains. Results of numerical analysis of the higher order are obtained.

研究分野：偏微分方程式の数値解析

キーワード：偏微分方程式 初期境界値問題 特異性 数値解法 高精度 有限差分法 数値解析 誤差評価

1. 研究開始当初の背景

数理モデルが様々な自然・社会現象を研究するために提案されている。その中に偏微分方程式で記述されたものは多く現れる。ほとんどの偏微分方程式に対してはその解析解を求めることが不可能であるから、その数値解をコンピュータで計算することによって現象を解明したり予測することは非常に重要な研究手段と言える。近年、コンピュータの発展と普及により、大規模科学計算による数値シミュレーションは各分野で活発に行われている。計算のスピードが進んでいる一方、計算の規模もさらに大きくなっている。たとえば、世界の誕生の瞬間から遠い将来までをシミュレーションする壮大な計算が行われている。そのため、信頼できる数値解を計算すると同時に計算時間を短縮することはますます求められている。これは高精度の数値解法の開発とその数値解析を目的とする本研究の大きな動機である。

2. 研究の目的

偏微分方程式に関する数値解法は応用数学分野を含む各分野の専門家たちによって数えきれないほど数多く提案されてきた。しかし、そのほとんどは滑らかな解をもつ偏微分方程式に適用するものである。本研究では、特異性の解を持つ偏微分方程式に対して、有限差分法、有限要素法、有限体積法など既知の数値解法の優れている点を取り込んで、高精度の数値解法を開発し、その数値解の誤差評価の理論を確立することを目的とする。

3. 研究の方法

研究代表者は、研究協力者の協力を得て、偏微分方程式、数値解析およびその関連分野である関数解析、数値線形代数、数値シミュレーションなどの知識を駆使して、今まで得られた研究成果を超える新しい手法を開発し、放物型偏微分方程式の初期値一境界値問題に対する高精度の数値スキームを提案する。さらに、国内研究者と海外研究者との交流を図りながら、提案した数値スキームの数値解析を行い、収束性や超収束性の誤差評価を与える。

これを遂行するためには、各種国内の関連研究集会に参加し、各地の専門家たちとの研究交流を行うことによって新しいアイデアを生み出す。また、より高性能なパソコンを購入し、より安定な数値線形代数のパッケージや数値計算ソフトウェアを使うことにより、新しい高精度の数値アルゴリズムを実装して検証する。また、開発した高精度の数値アルゴリズムを用いて、生態学や生物学などの分野に現れる数理モデルの数値的な考察を行う。

4. 研究成果

(1) 非線形 2 点境界値問題の高精度の数値解法に関する研究

研究代表者は、研究協力者の Xiao-Yu Zhang 氏との共同研究で、非線形 2 点境界値問題の高精度の数値解法を考察した。3 次精度のコンパクト差分スキームを利用して、得られた近似値を使ってスプライン補間で空間上の関数を構成する。その関数におけるもとの非線形微分方程式の線形化問題の解はもとの非線形問題の解に 6 次の精度で近似することを示した。線形化問題の 6 次精度の近似解を求めることによって、6 次精度のスキームを構成することができた。3 次精度のコンパクト差分スキームは 13 桁の有効精度しか得られないに対して、提案した 6 次精度は 15 桁の有効精度まで計算できる。これら研究成果は論文としてまとめられ、Numerical Algebra, Control and Optimization 誌に発表した。(論文 [5])

(2) 微分多項式を用いる有理型関数の値分布の一意性に関する研究

研究代表者は、研究協力者の Xiao-Yu Zhang 氏との共同研究で、有理型複素関数に対して共有の値または小関数に関連する有理型関数の一意性の条件を考察した。いままで知られている結果を拡張して、もっと一般的な形の整関数と有理型関数及びその微分多項式が高次まで内部的に共有の小関数をもつ条件を構成した。これにより、有理型複素関数の値分布がより知られ、その振る舞いがより深く解明された。研究成果は論文としてまとめられ、Information 誌に発表した。(論文 [4])

(3) 特異性の解を持つ放物型偏微分方程式の高精度の数値解法に関する研究

研究代表者は、研究協力者の Xiao-Yu Zhang 氏との共同研究で、多角形領域における放物型偏微分方程式の初期値一境界値問題の高精度の数値解法の開発とその数値解析の誤差評価に従事した。有限差分法を有限要素法の視点から導出することにより、放物型偏微分方程式の有限差分の離散微分を定めた。このアプローチにより有限要素法の解析手法を使うことが可能となり、有限差分の近似性およびその振る舞いがより深く解明された。真の解が時間変数と空間変数に対してもある程度の滑らかさを持つ条件のもとで、領域の分割要素に長方形と三角形が両方ある場合には、数値解が時間変数に関して 2 次の精度、空間変数に関して $3/2$ 次の精度を持つ。一方、領域の分割要素に長方形だけがある場合には、数値解が時間変数に関して空間変数に対しても 2 次の精度を持つ。研

究成果は論文としてまとめられ、Information 誌に発表した。(論文 [3])

(4) 特異性の解を持つ放物型偏微分方程式の高精度の数値解法に関する研究

研究代表者は、研究協力者の Xiao-Yu Zhang 氏との共同研究で、円盤領域における放物型偏微分方程式の初期値一境界値問題の高精度の数値解法の開発とその数値解析の誤差評価を従事した。空間変数と時間変数に対してはそれぞれ高精度の数値スキームを構成した。空間変数については、Swartztrauber-Sweet 法を適用し、時間変数については、陰型のオイラー法を適用してスキームを導出した。真の解が空間領域の境界でその微分係数が発散するという特異性があっても、ある程度の発散条件のもとで、構成した数値スキームの解はほぼ 2 次精度で真の解に収束することを証明した。つまり、空間変数について特異性の解をもつ問題に対しても、数値解が滑らかな問題とほぼ同程度の精度を持つ。一方、時間変数に関しては 1 次の精度を持つ数値解ではあるが、時間刻み幅は空間刻み幅と無関係に取ることができる成果をえました。研究成果は論文としてまとめられ、学術誌 Numerical Functional Analysis and Optimization に発表した。(論文 [2])

(5) 被食者—捕食者システムのダイナミックスの環境パラメータによる効果に関する研究

研究代表者は、研究協力者の Xiao-Yu Zhang 氏との共同研究で、被食者—捕食者システムのダイナミックスの環境パラメータによる効果を考察した。Holling type II 型の機能的反応をもつ Rosenzweig-MacArthur モデルに対して、環境収容力を減衰させる関数を導入した新しいモデルを考えた。数値シミュレーションによって新しいモデルの解の Hopf 分岐を調べた。また、狩猟効果を考えるモデルも考察した。数値研究によってその解の Hopf 分岐のダイアグラムを得た。研究成果は論文としてまとめられ、Communications in Computer and Information Science 誌に発表した。(論文 [1])

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① Qing Fang and Xiao-Yu Zhang, Effect of Environment on Prey-Predator Systems with Numerical Simulation,

Communications in Computer and Information Science, Vol.461, 420 – 423, 2014.

- ② Xiao-Yu Zhang and Qing Fang, Convergence of the Swartztrauber-Sweet Method for Parabolic Problems on a Disk with Singularities, Numerical Functional Analysis and Optimization, Vol.35, Issue 3, 356–369, 2014.
- ③ Xiao-Yu Zhang and Qing Fang, Superconvergence of FDM for IBV Problems of Parabolic Equations, Information, Vol.16, No.11, 7817 – 7826, 2013.
- ④ Xiao-Yu Zhang and Qing Fang, Uniqueness of Meromorphic Functions and Differential Polynomials, Information, Vol.16, No.7(A), 4497 – 4508, 2013.
- ⑤ Xiao-Yu Zhang and Qing Fang, A sixth order numerical method for a class of nonlinear two-point boundary value problems, Numerical Algebra, Control and Optimization, Vol.2, No.1, 31–43, 2012.

[学会発表] (計 10 件)

- ① Qing Fang, Superconvergence of finite difference solutions of elliptic and parabolic equations, 日本数学会東北支部会, 東北大学, 2015年2月14日
- ② Qing Fang and Xiao-Yu Zhang, Effect of Environment on Prey-Predator Systems with Numerical Simulation, The International Conference on Life System Modeling and Simulation 2014 & Intelligent Computing for Sustainable Energy and Environment 2014, Shanghai University, China, 2014年9月22日
- ③ Qing Fang, Superconvergence of Solution Derivatives for FDM to Parabolic Problems, Workshop on Computational Fluid Dynamics 2014, Hohai University, China, 2014年9月18日
- ④ Xiao-Yu Zhang and Qing Fang, Effective Condition Numbers of Linear Systems Arising from Discretization of Elliptic Equations with Singularities, 日本応用数理学会2013年度年会, アクロス福岡, 2013年9月9日
- ⑤ Qing Fang, On Solution Uniqueness of Elliptic Boundary Value Problem by Numerical Approach, Workshop on Numerical Analysis and Scientific Computing, Beijing Forestry University, China, 2013年8月2

- 日
- ⑥ 川谷淳・方青, Java による被食者-捕食者モデルのバースト振動への考察, 第42回数値解析シンポジウム, 四国道後館, 2013年6月13日
 - ⑦ Xiao-Yu Zhang and Qing Fang, Superconvergence of Solution Derivatives for FDM to Parabolic Problems, The Sixth International Conference on Information, アルカディア市ヶ谷, 2013年5月8日
 - ⑧ Qing Fang, Finite Differential Methods for Elliptic Boundary Value Problems with Singularities, Workshop on Computational Fluid Dynamics, Hohai University, China, 2013年1月4日
 - ⑨ Qing Fang, Superconvergence of solution derivatives for the FDM and FEM approximation to elliptic boundary value problems, Workshop on Numerical Analysis, Hohai University, China, 2012年12月27日
 - ⑩ Xiao-Yu Zhang and Qing Fang, Effective Condition Numbers of Finite Difference Methods for Elliptic Equations with Singularities, 日本数学会2012年度秋期総合分会, 九州大学, 2012年9月21日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

方 青 (FANG, Qing)
山形大学・理学部・教授
研究者番号: 10243544

(2) 研究協力者

張 曉宇 (ZHANG, Xiao-Yu)