

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 26 日現在

機関番号：12301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540112

研究課題名(和文) 超伝導におけるBCSギャップ方程式の解の温度依存性の解明

研究課題名(英文) Temperature dependence of the solution to the BCS gap equation for superconductivity

研究代表者

渡辺 秀司 (WATANABE, Shuji)

群馬大学・大学院理工学府・教授

研究者番号：90222405

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,700,000円

研究成果の概要(和文)：BCS理論は、超伝導現象の量子力学的理論として確立し、大きな成功を収めている。このBCS理論の基盤となるものがBCSギャップ方程式である。このBCSギャップ方程式の解について、Banachの不動点定理を応用して十分小さな温度に対して、解が温度と波数ベクトルの両方の関数として連続であることを示した。次に、Schauderの不動点定理を応用して、転移温度の半分程度の温度に至るまで解が両方の連続関数であることを示して、上の制限を撤廃した。さらに、解が温度についてリプシッツ連続であり、また、温度について単調減少することをも証明した。

研究成果の概要(英文)：The BCS theory is the successful quantum-mechanical theory of superconductivity. The basis of the BCS theory is the BCS gap equation. For temperatures small enough, we have shown that the solution to the BCS gap equation is continuous with respect to both the temperature and the wave vector on the basis of the Banach fixed-point theorem. For temperatures up to half of the transition temperature, we have shown that the solution is continuous with respect to both the temperature and the wave vector on the basis of the Schauder fixed-point theorem. Moreover, we have shown that the solution is Lipschitz continuous and monotonically decreasing with respect to the temperature.

研究分野：応用数学、応用解析学

キーワード：超伝導 BCSギャップ方程式 温度依存性 不動点定理 非線形積分方程式

1. 研究開始当初の背景

(1) 超伝導研究の歴史は古く、1911年に Onnes が絶対温度 4.2 K で水銀の電気抵抗がゼロになるという画期的な現象を発見したことに遡る。これは、ひとたび電流が流れれば永遠に流れ続ける、という驚異的な現象であって、超伝導と呼ばれた。この大発見により、Onnes はノーベル物理学賞を受賞し、その後今日に至るまで、様々な超伝導現象が発見され続けている。このような超伝導現象に関する量子力学的理論は、1957年に Bardeen, Cooper, Schrieffer の3人によって初めて確立され、BCS 理論とよばれ、大きな成功を収め続けている。ノーベル物理学賞がこの BCS 理論に対しても同様に授与された。

(2) 多くの金属や合金は超伝導状態になると、そのエネルギースペクトルに跳び(エネルギーギャップ)が観測され、これは、温度と電子の波数ベクトルの両方の関数なので、ギャップ関数と呼ばれている。BCS 理論においては、ギャップ関数は BCS 理論の土台となる BCS ギャップ方程式と呼ばれる非線形積分方程式の解である。したがって、もし、BCS ギャップ方程式には解が存在しないということが、数学的に証明されたら、ノーベル物理学賞が授与された BCS 理論が土台から崩れてしまい、混迷した大変な事態が生じてしまう。そこで、BCS ギャップ方程式には解が一意的に存在することを数学的に証明して、解の性質を数学的に解明することは、BCS 理論に数学的な裏づけを与えることになるので、極めて重要である。

(3) この方面での数学サイドからの先行研究としては、ヨーロッパやアメリカの研究者が BCS ギャップ方程式の解の存在と一意性を数学的に証明している。しかし、温度は固定されたままなので、BCS ギャップ方程式の解の温度についての連続性や微分可能性などの性質はその数学的な困難さ故に全く調べられていなかった。しかし、超伝導の物理学や工学では、解の温度についての連続性や微分可能性などの性質の解明が是非とも必要なので、数学サイドからの先行研究は全く不十分であった。

(4) BCS ギャップ方程式のポテンシャルが正の定数である場合は、BCS ギャップ方程式はシンプルな方程式になる。そこで、私は、陰関数定理を適用することにより、シンプルな BCS ギャップ方程式の解の存在・一意性を証明するのみならず、温度について2回連続微分可能であることなどを示した。

(5) この成果に立脚して、今度は BCS ギャップ方程式のポテンシャルが定数ではなくて、エネルギーの関数になっている場合を私は扱った。温度を任意に固定して、Schauder の

不動点定理を適用することにより、BCS ギャップ方程式の解の一意性に対する別証明を与えるとともに、解が温度とともにどのように変化するかを明らかにした。

2. 研究の目的

(1) 超伝導の量子力学的理論となる BCS 理論における BCS ギャップ方程式の解の温度に関する依存性を、不動点定理などの応用により作用素論的に明らかにする。特に、解の温度についての連続性を証明する。

(2) 温度について2回連続微分可能な関数によって解を近似して、通常の常伝導状態から超伝導状態への相転移が2次相転移であることを証明する。

3. 研究の方法

(1) BCS ギャップ方程式におけるポテンシャルが正の定数である場合には BCS ギャップ方程式はシンプルな方程式になる。この時に陰関数定理を応用して以前に私が得た成果に立脚して、今度は BCS ギャップ方程式におけるポテンシャルが定数ではなくて、エネルギーの関数になっている、より一層困難な場合を扱う。

(2) 温度と波数ベクトルの両方について連続な関数から成る Banach 空間のある部分集合 V に着目する。ただし、温度は十分小さいものと仮定する。このような仮定の下で、BCS ギャップ方程式の解をこの方程式が定める非線形積分作用素の不動点として捉えて、この非線形積分作用素が集合 V からそれ自身への縮小写像であることを証明する。こうすることによって、Banach の不動点定理を適用して、BCS ギャップ方程式の解が温度と波数ベクトルの両方について連続な関数となっていることを証明する。

(3) 次に、温度について2回連続微分可能な関数によって、上述の BCS ギャップ方程式の解を近似する。熱力学的ポテンシャルの表式に登場している BCS ギャップ方程式の解に、この近似解を代入する。このようにすれば、熱力学的ポテンシャルが温度に対して滑らかになる。熱力学的ポテンシャルが温度について2回連続微分可能であり、さらに転移温度では温度についての2階の偏導関数が不連続であること等を示して、通常の常伝導状態から超伝導状態への相転移が2次相転移であることを証明する。

4. 研究成果

(1) BCS ギャップ方程式におけるポテンシャルが正の定数である場合に陰関数定理を応用して以前に私が得た成果に立脚して、今度

はBCSギャップ方程式におけるポテンシャルが定数ではなくて、エネルギーの関数になっている、より一層困難な場合を扱った。温度と波数ベクトルの両方について連続な関数から成る Banach 空間のある部分集合 V をまず定義した。温度は十分小さいという仮定の下で、BCS ギャップ方程式が定める非線形積分作用素が集合 V からそれ自身への縮小写像であることを証明した。この結果、Banach の不動点定理を適用できて、BCS ギャップ方程式の解が温度と波数ベクトルの両方について連続な関数となっていることを十分小さな温度のときに証明した。

(2) 次に、常伝導状態と超伝導状態を分ける転移温度のおよそ半分の温度まで、上記の解が温度と波数ベクトルの両方について連続な関数となっていることを証明した。この結果、十分小さな温度という前記の制限を撤廃できた。さらに、解が温度について Lipschitz 連続であることや、温度について単調減少であることをも、Schauder の不動点定理を適用することにより証明した。この成果を論文として纏めている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

- 1 Motohiro Sobajima and Shuji Watanabe, Hardy inequalities for functions vanishing at negligible sets and its applications, *Applicable Analysis*, 査読有, in press. DOI: 10.1080/00036811.2014.1001381
- 2 Shuji Watanabe, An operator-theoretical treatment of Maskawa-Nakajima equation in the massless abelian gluon model, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 査読有, Vol.418, 2014, pp.874-883. DOI: 10.1016/j.jmaa.2014.04.029
- 3 Shuji Watanabe, Fixed point theorems and the BCS gap equation for superconductivity, *RIMS Kokyuroku*, 査読有, Vol.1921,2014, pp.84-90. <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1921-08.pdf>
- 4 Shuji Watanabe, Addendum to 'The solution to the BCS gap equation and the second-order phase transition in superconductivity',

Journal of Mathematical Analysis and Applications, 査読有, Vol.405, 2013, pp.742-745. DOI: 10.1016/j.jmaa.2013.03.070

Shuji Watanabe,

The solution to the BCS gap equation for superconductivity and its temperature dependence, *Abstract and Applied Analysis*, 査読有, Vol.2013, 2013, Article ID 932085. DOI: 10.1155/2013/932085

Shuji Watanabe,

Temperature dependence of the solution to the BCS gap equation, *RIMS Kokyuroku*, 査読有, Vol.1805,2012, pp.1-9. <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1805-01.pdf>

[学会発表](計 6 件)

- 1 Shuji Watanabe, Fixed point theorems and the BCS gap equation for superconductivity, *RIMS Workshop 'Mathematical Aspects of Quantum Fields and Related Topics'*, 2013年10月03日, Kyoto.

Shuji Watanabe,

Temperature dependence of the solution to the BCS gap equation for superconductivity and fixed point theorems, *QMath12 (Mathematical Results in Quantum Mechanics)*, 2013年09月10日, Berlin, Germany.

- 3 Shuji Watanabe,

A generalized Fourier transform and the Schroedinger operator with the inverse square potential, *Kagurazaka Seminar, Tokyo University of Science*, 2013年04月27日, Tokyo.

- 4 Shuji Watanabe,

Applications of fixed point theorems to the BCS gap equation for superconductivity,

The Fourth International Symposium on Banach and Function Spaces 2012, 2012年09月14日, Kitakyushu.

Shuji Watanabe,
Temperature dependence of the solution to the BCS gap equation for superconductivity,
XVII-th International Congress on Mathematical Physics,
2012年08月06日,
Aalborg, Denmark.

Shuji Watanabe,
カイラル対称性の自発的破れへの不動点定理の応用,
千葉大学素粒子論研究室コロキウム,
2012年05月21日, 千葉市.

〔図書〕(計 1 件)

- 1 Shuji Watanabe,
Applications of fixed point theorems to the BCS gap equation for superconductivity,
Banach and Function Spaces IV, 査読有,
2014, pp.425-433 (分担執筆).

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：

国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

群馬大学 大学情報データベース
https://univ-db.media.gunma-u.ac.jp/public/main.php?pid=paper_list&cat=paper&id=f62b69067f10dd764c52ebbf0b7e551

Cornell University Library, arXiv
<http://arxiv.org/find/all/1/all:+AND+Shuji+Watanabe/0/1/0/all/0/1>

6. 研究組織

(1) 研究代表者
渡辺 秀司 (WATANABE, Shuji)
群馬大学・大学院理工学府・教授
研究者番号： 90222405

(2) 研究分担者
齋藤 三郎 (SAITOH, Saburou)
群馬大学 名誉教授
研究者番号： 10110397

(3) 連携研究者
()

研究者番号：