

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 19 日現在

機関番号：12612

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540115

研究課題名(和文) 微分方程式に対する精度保証付き計算の総合ライブラリの構築

研究課題名(英文) Library for Validated Computation of Differential Equations

研究代表者

山本 野人 (YAMAMOTO, Nobito)

電気通信大学・情報理工学(系)研究科・教授

研究者番号：30210545

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では以下の成果を得た。(1) 偏微分方程式に関する微分作用素の逆作用素をノルム評価するための精度保証法 (2) 常微分方程式の解析のためのLyapunov関数を陽に構築する精度保証法 (3) 多倍長精度保証演算ライブラリLILIBの開発・実装
これに関する成果発表状況は、(1)については学術雑誌論文1件(査読付き)(2)については学術雑誌論文2件(査読付き)(3)についてはWeb上での実装ライブラリの公開、および以上に関する口頭発表多数(成果内容報告では主たるもの4件のみを挙げている)がある。

研究成果の概要(英文)：We have developed the following.
(1) Numerical verification methods for norm estimation of invers differential operators w.r.t. PDEs. (2) Validated methods of constructing Lyapunov functions w.r.t. ODEs (3) A library named LILIB for usage of interval multi precision arithmetic with guaranteed accuracy.

研究分野：数値解析、精度保証付き数値計算

キーワード：精度保証 偏微分方程式 常微分方程式 多倍長演算

1. 研究開始当初の背景

偏微分方程式の精度保証法は、九州大学のグループ（佐世保高専校長・中尾教授を中心とする）およびドイツ・カールスルーエ大学のグループの Plum 教授らのグループがリードして来た。当時はこのふたつのグループの共同が進み、特に偏微分方程式の固有値問題に関して顕著な成果が出ていた。発展方程式の精度保証法については、線形化方程式の逆作用素のノルム評価を利用する方法が中尾らによって提案され、適用範囲の拡充が図られていた。本課題研究代表者である山本は、自らの手法との統合による改善法のアイデアをもって、中尾グループ内での協働を始動しようとしていた。

力学系への精度保証法の適用は、P.Zigliczynski, K.Mischaikow, W.Tucker らによつて研究を契機として急速に発展する段階にあった。特に山本が提示した関数方程式に関する Krawczyk 作用素に相当する一意性の精度保証法が、ひろく用いられている状況であった。山本はこの手法をさらに一般化し、数学的に整った形式の定理として発表したところであった。また、力学系における不動点近傍の解析手法として Lyapunov 関数に注目し、双曲型不動点の場合に精度保証を用いて Lyapunov 関数を構成する方法のアイデアを持っていた。おなじころ、当時東北大に在籍していた松江要氏（現・統計数理研究所）が同様のアイデアを持っていること・発展方程式のような無限次元問題への適用も視野に入れていることを知り、共同研究を提案していた。

多倍長精度保証法については、既存のものとしては、多倍長演算ライブラリ MPFR に基づく区間演算ライブラリ MPFI や京都大・藤原による EXFLIB の区間バージョンなどが用いられていた。これらはいずれも上端・下端形式の区間表現を用いるものであった。これに対し、山本および山本の指導下にあった大学院生の松田望は、中心・半径形式の区間表現による多倍長演算のアイデアをもっていた。これは、メモリーや計算速度の点で上端・下端形式に対する原理的な有利さを持つ方法である。しかしながら、具体的なライブラリ構成の方法や精度に関する理論的な整備はまだ不十分な状況であった。

2. 研究の目的

本課題の主眼は、「発展方程式に限定せず、微分方程式の精度保証法に関連する諸技法を統合し、さまざまな分野への応用のためのツールを開発すること」に置く。具体的には、

- (1) 微分方程式の精度保証に必要な技法（線形化作用素のノルム評価、固有値の被存在範囲の同定、検証条件に関する反復法など）に関して整理・改善・開発を行い、これらの実装についてはコンピュータプログラムの自動生成法を確立する。
- (2) 無限次元力学系に関する精度保証法と発展方程式の精度保証法との関係を明確化し、ポアンカレ写像・コンレイ指数といった力学系の概念の応用や、双曲型不動点に対するニュートン・カントロビッチ型の精度保証法の適用など、新しい技法の開発を行なう。特に進行波解の解析に応用出来るツールを備えたい。
- (3) 多倍長精度保証ライブラリの充実を図る。前述したように、既存の主要なライブラリはいずれも上端・下端形式の区間演算に基づくものであり、中心・半径形式を取るものは少ない。理論上は中心・半径形式に基づく多倍長精度保証法が優位であるので、その開発を進めて、実用となるプログラムライブラリを作成し、これを公開する。また、需要の大きい複素数型の多倍長精度保証法の開発も行なう。
- (4) さらに、時間発展型の Navier-Stokes 方程式の解析ツールなど、本格的な応用に向けてライブラリを発展させて行く。

3. 研究の方法

- (1) 偏微分方程式の精度保証法の整備と開発について

理論面では、中尾グループ内での協働を進め、特に線形化作用素の逆作用素のノルム評価の方法について、計算手法への依存性を中心とした解析を行なう。また MATLAB の諸機能を利用して、精度保証プログラムの自動生成法の開発を行い、公開して利用形態を調査しつつさらに改善を進める。

- (2) 力学系の精度保証法について

統計数理研究所・松江らの協力を得て、理論の整備・発展にあたる。また Lyapunov 関数に関する精度保証技術をもとにして、発展方程式の精度保証法の開発に寄与する。

(3) 多倍長精度保証ライブラリについて

京都大・藤原らなど多倍長演算の専門家との共同研究を進め、精度保証に必要なルーチンの整備・開発に努める。完成したライブラリを公開し、利用形態の調査を行なって改善を進める。

4. 研究成果

(1) 偏微分方程式の精度保証法の整備と開発について

PDE については、佐世保高専校長・中尾教授や九州大学・渡部准教授らとの協働により、2 階楕円型作用素の逆作用素の存在を証明するための精度保証法、および逆作用素のノルム評価をおこなう技法を開発し、論文を執筆・公刊した。微分方程式の精度保証プログラム自動生成については、MATLAB 上で数式処理を利用したものを開発し、山本研究室での運用を行なった。その結果、数式変形が複雑でないものについては有効で、精度保証研究に寄与できるものであることがわかった。一方で、座標変換などを頻繁に行なうと数式表現の膨張を引き起こし、計算時間が多大になるなどの問題点が生じることも判明した。現在では、早稲田大学・柏木氏との共同研究を模索して、アフィンアルゴリズム等の利用を視野に入れた研究を進めている。

(2) 力学系の精度保証法について

連続力学系および離散力学系に対して、その双曲型不動点の周辺での Lyapunov 関数を精度保証法で確定する方法を開発した。これは、統計数理研究所・松江要氏との共同研究であり、共著で学会発表などを行なっている。さらに、不動点だけでなくリミットサイクルの近傍での Lyapunov 関数の構築にも成功し、現在論文を執筆中である。また、Lyapunov 関数の等位面を通過する解集合をより効率的に捉える Lyapunov Tracing という精度保証技術を開発した。これは、早稲田大学・大石および高安らの研究に利用され、爆発解の精度保証などに成功している。さらに、ヘテロクリニック/ホモクリニック軌道の精度保証のために、Interval Simplex 理論を構築した。これは、3 次元以上のトポロジカルな理論が必要とされる状況に対応する

ものである。以上については、学会発表を行い、また論文を刊行もしくは執筆している。

(3) 多倍長精度保証ライブラリについて

多倍長精度保証法については、中心・半径形式を用いる演算法の理論開発および実装方法の開発を、山本研の大学院生である松田と共同で行い、LILIB と名付けたライブラリを実装して公開した。現在、実際的な問題に使用してその性能評価を行ないつつ、論文を執筆しているところである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- (1) M. T. Nakao, Y. Watanabe, T. Kinoshita, T. Kimura and N. Yamamoto,
Some considerations of the invertibility verifications for linear elliptic operators, JJIAM, 査読あり, 32/1, pp19-31, 2015
- (2) M. Harikae, N. Yamamoto,
Validated Computation of Global Solutions to ODEs
NOLTA, 査読あり, 4/1, pp.88-96, 2013
- (3) 樋脇知広、山本野人,
力学系における閉軌道の存在領域の精度保証法による同定
日本応用数理学会論文誌、22/4, pp269-276, 2012

[学会発表] (計 4 件)

- (1) Tomohirio Hiwaki and Nobito Yamamoto,
A numerical verification method for a basin of a limit cycle
SCAN2014, 2014/09/22
- (2) 樋脇知広、渡辺真伊智、山本野人
Lyapunov Tracing による常微分方程式の精度保証法について
日本応用数理学会 2013 年度年会, 2013/09/10
- (3) 樋脇知広、山本野人
リミットサイクルの吸引域に含まれる領域の精度保証法による同定
2012 年度日本数学会秋季総合分科会, 2012/09/21
- (4) 松江要、山本野人
Saddle-saddle connection の精度保証付き数値検証
日本応用数理学会 2012 年度年会, 2012/08/31

[図書] (計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0件）

○取得状況（計 0件）

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山本 野人 (YAMAMOTO, Nobito)

電気通信大学・情報理工学研究科・教授

研究者番号：30210545

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし