様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 28 年　6 月　8 日現在

機関番号：14301
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2015
課題番号：24540122

研究課題名（和文）超関数の近似に関する新しい理論の構築と数値計算への応用

研究課題名（英文）New approximation algorithm for generalized function and its its application to numerical computation

研究代表者
大浦　拓哉（Ooura, Takuya）

京都大学・数理解析研究所・助教

研究者番号：50324710

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　4,000,000円

研究成果の概要（和文）：計算機で数値計算が困難ないくつかの問題に対して，新しい算法の構築を行った．その算法は，超関数を近似することによって得られる．具体的な応用は，複雑な振動積分，多次元振動積分，積分変換，非整数階常微分方程式の数値計算に対して行った．特に複雑な振動積分や多次元振動積分の算法は，従来の算法よりも高速かつ高精度で計算可能となることを確認した．

研究成果の概要（英文）：We propose new numerical computation methods which are derived from approximation of generalized function. Targets of computation are complicated oscillatory integral, multidimensional oscillatory integral, integral transform and fractional differential equations. New methods can be computed with high speed and high accuracy about oscillatory integrals in particular.

研究分野：応用数学

キーワード：数値解析　超関数　連続Euler変換

## １．研究開始当初の背景

2005 年以降，私は連続 Euler 変換による近似超関数の研究を行い，ある種の微分方程式や積分方程式に関する新たな計算法の研究を行った．

連続 Euler 変換とは，2001 年に私が通常の Euler 変換の連続拡張として発見したものであり，以下の特徴を持つ．

(1) Fourier 積分の収束の改善
収束の遅いまたは緩やかに発散する Fourier 積分を速く収束する Fourier 積分に変換する．この応用で，古くから計算困難とされる収束の遅い Fourier 積分に対する高速高精度の数値計算を可能にする．

(2) 超関数の滑らかな関数での近似
連続 Euler 変換はまた，さまざまな超関数を線型写像としての性質を近似的に保った状態で，滑らかな通常の関数に変換する方法でもある．この連続 Euler 変換による超関数の近似は機械的に構成できて，かつ非常に高精度である．応用の面では，非整数階微分や遅延や積分を含むような微分方程式が超関数を含む単純な積分方程式で表されるので，この超関数を通常の関数として近似することで，数値積分の問題に置き換えて高精度で解くことが可能になる．
そして，この連続 Euler 変換による近似超関数の研究は，連続 Euler 変換の 2.の特徴についての研究であり，高速高精度算法の導出を目的として行い，いくつかの算法を導出することに成功している．

本研究は連続 Euler 変換による近似超関数の研究をより発展させ，より一般的な近似超関数理論の構築を行い，さらに従来の方法では計算困難な問題への応用を行うことである．

## ２．研究の目的

本研究の目的は，理工学分野に頻繁に出現し研究・開発の障害となる，超関数が間接的に影響する「計算の困難性」を解析・克服することである．

最近，私が理工学で重要とされる数値計算の中に多数存在する，計算が困難なものの性質を解析したところ，超関数が間接的に関与しているものが非常に多いことを発見した．
これに着目して，まずディラックのδ関数などの超関数が計算機で扱えないために，計算が破綻するというメカニズムが存在することを発見し，部分的な解決に成功している．
本研究では，これを手がかりに，様々な「計算の困難性」の背後に関係している超関数の解析を行い，その超関数を意識的に扱うことで，その計算困難性を解析・克服する．

## ３．研究の方法

(1) 平成２４・２５年度
まず数値積分に限定して研究を進める．

① 計算困難性と超関数との関係を調査
数値積分に限定すると，応用上重要な例は複雑な振動積分や多次元振動積分であると思われる．これらの計算には連続 Euler 変換による方法など効果的な算法が存在し，その算法での超関数の扱いについて詳しく調べる．

② 超関数を意識した新しい算法の構築
超関数を扱う方法を一般化して，新しい算法を構築する．具体的には，連続 Euler 変換による近似超関数の発展および拡張による方法に，超関数を数学的に適切に処理する方法を加えたアプローチで行う．

③ 新しい算法の有効性の検証
提案した算法が，より広い計算問題の解決方法となりうるかどうかの検証を行う．また，従来の算法との計算量の比較も行い，計算機を用いて実用計算に耐えうるかどうかの検証を行う．

(2) 平成２６年度以降

平成２６年度以降は，積分変換，非整数階微分方程式の順に，以下の手順を用いて各々についての研究を進めていく．

① 計算困難な数値計算の種類を調査
超関数が関与する計算困難な数値計算の例は，勝手に創造できるものを加えれば無数に存在すると思われるが，その中で特に応用上重要なものを選ぶ必要がある．そのためには，理工学系の数値計算の分野の様々な問題について知る必要があり，国内や国外の数値計算や応用数学の研究集会・学会に出席し，最新の動向にも理解を深める．また，様々な研究者とのコミュニケーションをとる．

② 計算困難性と超関数との関係を調査
計算困難な例に関して，計算困難性と超関数の関係について，様々なアプローチから詳しく調べる．

③ 超関数を意識した新しい算法の構築
提案した算法を基本にし，b.で解析した結果を考慮した上で，超関数を扱う方法による新しい算法を構築する．これは，より広い問題の解決方

法を探ることになる．

④ 新しい算法の計算量の比較
提案した算法と従来の算法との計算量の比較を行う．まず，計算精度，計算サイズ，次元数等に対する理論的な計算量のオーダーを見積もる．次に，具体的な計算機上で数値実験を行い，実行時間や計算精度の検証をし，有効性の判断を行う．この数値実験は，基本的に計算困難な問題を扱うので非常に大規模なものになると予想され，高速高性能の計算機が不可欠である．そこで，計算機を用いてこの数値実験を行う．

⑤ 成果の発表
ここで得られた成果を学会や論文で発表する．また，著しく有用な算法に関しては，計算ライブラリを作成し，Web で公開する．

⑥ 近似超関数の理論の構築
様々な計算困難な問題に克服する，新しい算法の類似点を考察することで，超関数を計算機で統一的に扱う理論の構築を進める．その構築で必要な知識は，数学・計算機科学・計算工学などの広範囲の分野にわたると予想される．そこで，必要に応じてそれぞれの分野の専門家との研究打ち合わせを行う．

⑦ 近似超関数の理論の応用
新しく構築された近似超関数理論の応用範囲の具体的な確認を行う．これには理論的な解析と，計算機による数値実験との併用で行う．

## ４．研究成果

超関数に関係する計算困難な数値計算の種類を調査した結果，複雑な多次元振動積分，Goursat の無限区間積分，Fourier 変換，Hankel 変換，非整数階微分の近似計算が候補に挙がった．以下に，これらの計算に対する新しい算法の成果について述べる．

(1) 複雑な多次元振動積分に関する成果
稳やかに増加する関数の Fourier 変換に連続 Euler 変換を施したときの近似誤差について詳しく調べた．その結果，増加のオーダーに対してある意味で最適な連続 Euler 変換が作れることを確認した．その結果を応用して，ある複雑な多次元振動積分に対する計算法を提案し，計算機での計算プログラムを作成した．この算法は，従来の方法と比較して非常に高速かつ高精度で積分計算ができることを示した．この研究の成果は，龍谷大学瀬田キャンパスでの応用数学合同研究集会で行った．

(2) Goursat の無限区間積分に関する成果
この積分は周期的にピークを持ち，そのピークが高く尖っていく非有界関数の 0 から無限大までの積分である．そのため，この積分値を具体的に計算することは困難であるとされてきた．この計算困難な積分に対して非常に効果的な算法を提案した．その方法は，スッテップ関数を佐藤超関数とみなして積分を置き換え，さらに Hilbert 変換を用いて特異性を除去するというものである．この研究の成果は，Journal of Computational and Applied Mathematics の論文として発表し，The 8th International Congress on Industrial and Applied Mathematics で口頭発表した．またこの算法は，Hilbert 変換が解析的に計算できるような様々な積分の計算に応用可能で，汎用性が高いものと考えられる．

(3) 積分変換の計算に関する成果
以前の研究より，穏やかに増加する関数の Fourier 変換は超関数として意味を持つという事実と，連続 Euler 変換は超関数の近似としての意味を持つという性質を利用して，収束の遅い，または増加する関数の Fourier 変換の計算が容易に行えることが明らかになっている．この理論を拡張して Bessel 関数を含むような Hankel 変換に対しても，Fourier 変換と同様の算法で容易に計算できることを示した．しかし，この算法は Fourier 変換の計算では従来の算法よりも有効に働くが，Hankel 変換の計算では従来の算法と同程度の計算効率しか出ないことを確認した．理由は Hankel 変換のカーネルが原点で特異性があることと，高速 Fourier 変換アルゴリズムが使えないという 2 点の影響によるものと考えられる．

(4) 非整数階微分方程式の計算に関する成果
非整数階微分の計算は，ディラックのδ関数を非整数階微分した超関数の積分計算に相当すると考える．そして，その超関数を連続 Euler 変換で近似することで，非整数階微分の近似計算ができる．非整数階微分の近似算法を作成し，従来の方法と比較したところ，速度に関する優位性は認められなかったが，高精度で計算できることを確認した．この非整数階微分の近似算法と，スペクトル法などの微分方程式の解法を組み合わせることで非整数階微分方程式の算法が作成できる．しかし，整数階常微分方程式に対する新しい方法は，従来の方法と比較して同程度の性能で著しい優位性は確認できなかった．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）
T. Ooura, Direct computation of generalized functions by continuous Euler transformation, Sugaku Expositions, 25, (2012) 89-104.
T. Ooura, Fast computation of Goursat's infinite integral with very high accuracy, J. Comput. Appl. Math., 249, (2013), 1-8.

〔学会発表〕（計 ３件）
大浦拓哉, 振動積分の数値計算法について, 応用数学合同研究集会, 龍谷大学瀬田キャンパス (招待講演), 2012/12/21.
大浦拓哉, 連続オイラー変換による振動積分の算法, 第42回数値解析シンポジウム, 松山道後温泉 道後館, (特別講演), 2013/6/12.
T. Ooura, Computation of an infinite integral with unbounded integrand, The 8th International Congress on Industrial and Applied Mathematics, China National Convention Center inside the Beijing Olympic Green, 2015/8/13.
〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）
○取得状況（計０件）

〔その他〕
ホームページ等
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ooura/profile-j.html

６．研究組織
(1)研究代表者
大浦 拓哉（Ooura, Takuya）
京都大学・数理解析研究所・助教
研究者番号：50324710
(2)研究分担者
(3)連携研究者