2版

様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ６ 日現在

機関番号： ３２６１２
研究種目： 基盤研究(C)（一般）
研究期間： 2012～2015
課題番号： ２４５４０１４０
研究課題名（和文） 経路の形を緩和した車両配送問題の多項式時間で解けるクラス

研究課題名（英文） Special cases of several routing problems and various relaxations of routes

研究代表者
小田　芳彰（ODA, YOSHIAKI）

慶應義塾大学・理工学部・准教授

研究者番号：９０３２５０４３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：巡回セールスマン問題とは与えられた複数の都市をすべて１回ずつ通り，出発点に戻ってくるような最短経路を求める問題である．この問題はNP困難のクラスに属し，都市数が増えたとき実用的な時間（多項式時間）で最短経路（最適解）を求めるのは不可能と予想される代表例になっている．この問題やその一般化した問題に対し，どのような条件をみたしていれば多項式時間で解けるのかについて数学の側面から研究を行った．この研究では，最適解が持つ経路の形の特徴付けとその証明，および具体的に最適解を求めるアルゴリズムの両方が必要である．また，これに関連する円順列，順列，集合の均等分割に関する問題にもいくつかの成果を得た．

研究成果の概要（英文）：The Traveling Salesman Problem is the problem to find a shortest route which starts from some city, visits each city exactly once and comes back to the initial city. This problem is one of the most famous NP-hard problems. This shows that when the number of cities increases it becomes to be hard to find a shortest route (optimal solution) in a reasonable time (polynomial time). In this work, we studied those problems from mathematical points of view and found polynomial time solvable cases for the problem and its extended routing problems. In this research area, we need not only characterizations of optimal solutions for those cases together with proofs but also algorithms to compute a shortest routes among all solutions.
Also, we worked several problems on balanced partitions for cyclic permutations, permutations and sets of finite integers which relate to the Traveling Salesman Problem.

研究分野： 数物系科学

キーワード： 組合せ論　離散数学　経路問題　整数の分割

１．研究開始当初の背景

(1) 巡回セールスマン問題（The Traveling Salesman Problem，以下 TSP）とは与えられた複数の都市をすべて１回ずつ通り，出発点に戻ってくるような最短経路（巡回路）を求める問題である．この問題は NP 困難に属し，都市数が増えたとき実用的な時間（多項式時間）で最短経路（最適解）を求めるのは不可能と予想される代表例である．そこで，実社会での応用の観点から，実用的な時間で最適解に近い解を求めようとする近似解法の研究がさかんに行われてきた．その一方，理論的な観点からはどのような性質があれば，TSP の最適解が多項式時間で得られるかについて研究されてきた．TSP の多項式時間で解けるクラスの研究は 1950 年代から始まり，Monge 性をみたすクラスなどのようにピラミッド型巡回路が最適解になる条件が示されてきた．この研究では，各頂点間の距離に対してある制約条件を与えた問題に対し，以下の２つを示すことが本質的である．

・ 最適解の構造をある程度特徴付けできることを証明する．すなわち，最適解が解集合のある部分集合に含まれることを示す．

・ その部分集合の中の最適解を求める多項式時間アルゴリズムを構成する．

本課題開始前までに，研究代表者は，緩和したピラミッド型巡回路を用いた TSP，TSP の一般化となる車両配送問題(The Vehicle Routing Problem，以下 VRP)，さらにその一般化の多倉庫車両配送問題(以下 MDVRP)の多項式時間で解けるクラスについて研究を行ってきた．
以下，TSP について考える．各 n 都市（頂点）に対し１から n までの番号がふられている下で，ピラミッド型巡回路とは巡回路（ハミルトン閉路）で特に訪問する都市の番号が単峰的なもののことをいう．例えば，(1,3,6,5,4,2)は 6 頂点の有向グラフ上のピラミッド型巡回路の一例である．一般に，n 頂点の有向グラフに対しピラミッド型巡回路は 2^{n-2} 個存在する．ピラミッド型巡回路が最適解になることが証明されたクラスに対しては，最短のピラミッド型巡回路を求める多項式時間アルゴリズムにより，TSP の最適解が多項式時間で得られる．すなわち，このクラスが TSP の多項式時間で解けるクラスであることが保証される．
VRP とは，1 つの倉庫から p 台のトラックが出発し，各トラックが与えられた n 都市を分担して回って倉庫に戻ってくるとき，総移動距離が最短になるような各トラックの配送経路を求める問題である．p＝1 のときは TSP と同じ問題になるので，VRP は TSP の一般化と言える．また，MDVRP とは，複数の倉庫から合計 p 台のトラックが出発し，各トラックが与えられた n 都市を分担して回る形の問題である．

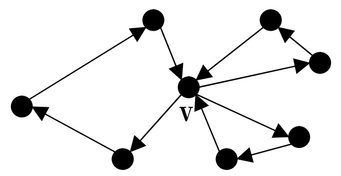

図１ VRP の解の例(頂点 v が倉庫に相当)

VRP，MDVRP いずれに対しても，多くの研究者が近似解法，厳密解法に関する研究を行なってきた．代表者は，TSP の多項式時間で解けるクラスを VRP に適用した場合に関するいくつかの定理を示してきた．また，MDVRP の多項式時間で解けるクラスについても，Monge 性に関する結果を得ていた．この一連の結果をふまえ，TSP を一般化した種々の経路問題に対し，多項式時間で解けるクラスおよびそのアルゴリズムを考案することが当該分野において興味深いテーマであると考えた．特に，同じクラスに対しても，問題によっては最適解の持つ形に変化が生じる場合があり，問題間の差異を明確にすることは意義深い．

(2) 代表者らは，平面上のハミルトン閉路が含む交差を解消する問題についても取り組んできた．
一般に，平面上の頂点配置におけるハミルトン閉路は辺の交差を含んでいる．この交差する 2 辺を別の 2 辺に交換する操作をフリップとよび，交差のないハミルトン閉路を得るまでに少なくとも何回のフリップが必要かという問題に代表者らは取り組んできた．2 点間の距離を平面上のユークリッド距離とするとき，交差のないハミルトン閉路は TSP の唯一の最適解に対応する．Englert ら(2007)は一般の TSP において都市数に関して指数回のフリップが必要な例を与えたが，代表者らは，凸状に配置された n 点を通るハミルトン閉路を考え，O(n)回で十分であることを示した（小田，渡辺(2008)）．しかし，厳密な値を決定できていない．我々はいくつかの例外を除き，n-2 回で可能であることを予想している．設定は単純であるものの，完全決定できていないこの問題の解決に向け，関連する問題も含めて取り組みたいと考えた．

２．研究の目的

本課題では，多項式時間で解けないと予想されている TSP や VRP 等の経路問題に対して，以下の 3 つのテーマに取り組む．１．研究開始当初の背景の(1)がテーマ１とテーマ２，(2)がテーマ３に対応している．

テーマ 1．経路問題（TSP や VRP およびそれらの一般化問題）の多項式時間で解けるクラス

テーマ 2. 経路問題に対するピラミッド型巡回路の緩和とそのアルゴリズムの考案および計算機実験による比較

テーマ 3. 平面上の凸状 n 点配置におけるハミルトン閉路のフリップによる交差の解消

３．研究の方法

本研究の遂行で取った方法のうち，特筆すべき点は下記の４つである．

(1) TSP の多項式時間で解けるクラスについて既に知られている条件を証明まで含めて網羅的に調べ直した．特に TSP とは異なる経路問題，例えば後述の 2 部巡回セールスマン問題については，TSP とは証明のポイントが大きく異なり，TSP との差異を明確にすることが重要であった．

(2) 当該分野の研究者と適宜連絡を取り合うことで情報交換に努めた．特に TSP の多項式時間で解けるクラスの分野で著名な研究者の１人であるイギリス・ウォーリック大学の Deĭneko 氏と研究打合せを行うために，ウォーリック大学に滞在した．その後も電子メールにより，打合せを進めている．また，フリップに関する問題の共同研究者である倉敷芸術科学大学名誉教授の渡辺守氏を招聘し，研究打合せを行った．

(3) テーマ 3 については，証明のアイデアを得るために，このアナロジーとなるいくつかの問題に取り組んだ．例えば，平面上凸状点配置は円順列に対応することから，円順列や順列を対象にすることは本質的である．また 2 辺の交換のアナロジーとして 2 要素の交換を繰り返す設定を考えることで予想の解決に寄与できるのではないかと考えた.（この設定による問題自身も面白いと考えている.）

(4) 必要に応じて，コンピュータを使った計算機実験を行った．いずれの研究も，離散的な構造を対象にしているため，問題のサイズが小さいところに対し，コンピュータを使うことで，挙動を見ることができ，一般化への手助けになった．計算を主目的として購入したサーバが有効に活用できたと考えている．

４．研究成果

(1) テーマ１：経路問題（TSP や VRP およびそれらの一般化問題）の多項式時間で解けるクラス，およびテーマ２：経路問題に対するピラミッド型巡回路の緩和とそのアルゴリズムの考案および計算機実験による比較，について以下の結果を得た．

① Monge 性をみたす VRP の最適解を求める多項式時間アルゴリズム

代表者は本課題開始前までに，VRP に関連し，n 頂点のグラフに対し，閉路の数 k を指定すると（ただし k は定数と仮定），最短のピラミッド型経路が $O(n^{2k})$時間で得られる多項式時間アルゴリズムを考案していた．この結果から，例えば Strong Demidenko 条件をみたすグラフについては，VRP の最適解が多項式時間で得られることが保証される．本課題において，Monge 性をみたすグラフに対し，VRP の最適解が $O(n)$時間で求められることを示した．これは k に依存しないという意味で，他の条件の場合よりも高速に最適解が得られることを表しているが，それとともに Monge 性がかなり強い条件であることも示している．

② ２目的巡回セールスマン問題

本研究は，当時大学院生の大芝氏とともに取り組んだ．2 目的巡回セールスマン問題（The Biobjective Traveling Salesman Problem）とは各都市間に距離，コストのように 2 種類の値が割り振られているとき，「悪い」解以外を全列挙する問題である．ここで，「悪い」解 x とは，ある解 y(≠x)が存在し，2 種類の値（目的関数値）のいずれも y の方が x より小さいものを言う．TSP 自身が NP 困難であるため，2 目的巡回セールスマン問題はそれ以上に難しいが，Demidenko 条件のように TSP が多項式時間で解ける条件を課すことで，頂点数によっては 2 目的巡回セールスマン問題の全列挙を行うことが可能である．Ozpeynirci, Koksalan (2010)は，2 つの目的関数がいずれも tour improvement technique により TSP が多項式時間で解けることが示されている条件ならば，各辺の値の最大値に依存する多項式時間で 2 目的巡回セールスマン問題を解けるアルゴリズムを考案している．我々はこれに対し，既存の多目的最適化問題でよく知られている k 番目に小さい解を求める手法に注目し，k 番目に小さいピラミッド型巡回路を求めるアルゴリズムを考案することで，Ozpeynirci らとは異なるアルゴリズムを作り，計算機実験で比較検討を行った．また，2 目的関数がそれぞれ Supnick 条件，Kalmanson 条件をみたすとき，解集合の持ついくつかの性質を示すこともできた．

③巡回購買人問題のピラミッド型経路に関するアルゴリズムと多項式時間で解けるクラス

本研究は，当時大学院生の長井氏とともに取り組んだ．要素数が等しいいくつかの都市の集合および倉庫の和集合を頂点集合とするとき，倉庫を通り，かつ各集合に対し通る頂点数に制約があるピラミッド型閉路の中で距離最小のものを求める多項式時間アルゴリズムを考案した．さらに，各頂点に重みを割り当てた際，各集合で通る頂点の重みの和

に制約を与えた最短ピラミッド型閉路を求める多項式時間アルゴリズムも得た．この結果の系として，巡回購買人問題（The Traveling Purchaser Problem）のある特殊な場合が多項式時間で解けることを導いた．その後，このピラミッド型閉路の数が１つではなく，k 個に拡張した場合でも k が定数であれば多項式時間で解けることがわかった．これは VRP において，必ずしもすべての頂点を通る必要がなく，いくつかの部分集合ごとにある種の制約がある場合の問題に対応している．

④ 2 部巡回セールスマン問題の多項式時間で解けるクラス
本研究は，イギリス・ウォーリック大学の Deĭneko 氏との共同研究である．2 部グラフを対象とする 2 部巡回セールスマン問題(The Bipartite Traveling Salesman Problem）において，Monge 性を緩和したあるクラスに対し，多項式時間で最適解が得られることを証明した．グラフを 2 部グラフに制約することにより，証明が簡易になるというわけではなく，むしろ tour improvement technique で選択できる辺の候補が限定されることがわかった．なお，この場合においても，最適解はピラミッド型巡回路とは限らず，これを緩和した巡回路を導入する必要があった．この緩和が多項式時間で求解できる範囲で留められたことが特筆すべき点である．時間計算量のさらなる最小化については今後の課題である．

(2) テーマ 3：平面上の凸状 n 点配置におけるハミルトン閉路のフリップによる交差の解消については，目標となる予想の解決には至らなかった．3．研究の方法で述べたとおり，解決に向けて証明のアイデアを得るべく，この問題のアナロジーとなるいくつかの問題に取り組み，以下の結果を得た．

① 順列の均等 2 分割とその応用
本研究は，中本，山下，渡辺三氏との共同研究である．我々は本課題開始前までに，集合{1,2,...,n}上の順列と自然数 k が与えられたとき，必要なら 2 要素を交換することで，順列のある前方部分列の要素の和が k になるように 2 分割可能であることを示していた．この系として，順列を和がほぼ均等（差が高々1）になるように 2 分割できることがわかる．この結果の応用として，平面上のラベルつき n 点配置に対する２つのパスによる被覆に関する定理を示した．またその後，均等 2 分割に関する定理の証明を簡略化することができた．さらに，01 の数列に対するある種の均等 2 分割に関する結果も得られた．
安藤ら(1990)は，集合{1,2,...,n}を和が均等になるように指定した個数の部分集合に分割できるための必要十分条件を得ていたが，本課題において，和が等差数列になるように分割できるための十分条件を得ることができた．（しかしその後，これは既知の結果であることが判明した．）
さらに，均等２分割を一般化した問題を考え，特に集合の均等３分割に関する結果を得た．まず，要素数がいずれも m の 3 色集合 R,B,W の要素計 3m 個を混ぜ，3 つの集合 X,Y,Z に m 個ずつ分ける．このとき，X,Y,Z をいずれも単色集合にするために必要な 2 要素の交換回数について評価を与えた．なお，この値が最善，すなわちこの値より少ない回数では単色集合にできない例も示すことができた．均等 4 分割については上限を与えることはできているものの，一般的な評価は難しいと考えている．なお，この集合の均等 3 分割に関する結果から，順列の均等 3 分割における 2 要素の必要交換回数についてある上界が得られる．

② 円順列の連続 k 部分列の和がほぼ均等になるような配置について
本研究は，中本，山下，渡辺三氏との共同研究である．集合{1,2,...,n}上の円順列で連続する k 個の和の最大値と最小値の差の評価に関する結果を得た．連続する k 個の和を一定にすることは一般に不可能であるが，その値のとりうる範囲がなるべく小さくなるような状況を考えることは，ほぼ均等な配置を考えることに対応する．k=2 の場合は比較的容易に考察できるが，k=3 の場合について完全な評価を与えた．これは円順列の要素数 n の値により挙動が変わるものの，いずれの場合もこの値について評価し，最善である例を構成することができた．この例の構成にはコンピュータによる計算が有用であった．

以上の成果について，論文２編にまとめ，現在学術雑誌に投稿中である．それ以外の成果についても，投稿を予定しており，特に，2 部巡回セールスマン問題については準備を進めている．また，得られた結果について，学会，研究集会等で成果発表を行っている．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔学会発表〕（計　7　件）
① 小田芳彰，中本敦浩，山下登茂紀，渡辺守，円順列と連続 k-部分列の和の均等性について，2015 年度応用数学合同研究集会，2015 年 12 月 19 日，龍谷大学（滋賀県・大津市）．

② 小田芳彰，中本敦浩，山下登茂紀，渡辺守，円順列の連続する k-部分列の和について，第 27 回位相幾何学的グラフ理論研究集会，2015 年 11 月 13 日，横浜国立大学（神奈川県・横浜市）．

③　小田芳彦，中本敦浩，山下登茂紀，渡辺守，均等2分割の一般化とそれに関連する話題, 2014年度応用数学合同研究集会, 2014年12月20日，龍谷大学（滋賀県・大津市）.

④　大芝淳，小田芳彦，2目的の巡回セールスマン問題について，田澤新成先生ご退職記念研究集会，2014年2月21日，近畿大学（大阪府・東大阪市）.

⑤　Atsuhiro Nakamoto, Yoshiaki Oda, Mamoru Watanabe and Tomoki Yamashita, Balanced partitions on permutations and their application to a geometric problem, The 25th Topological Graph Theory, 2013年11月20日，横浜国立大学（神奈川県・横浜市）.

⑥　Atsuhiro Nakamoto, Yoshiaki Oda, Mamoru Watanabe and Tomoki Yamashita, Balanced partitions on permutations and their application to a geometric problem, 日本数学会，2013年9月25日，愛媛大学（愛媛県・松山市）.

⑦　小田芳彦，車両配送問題の多項式時間で解けるクラスとその計算量，日本応用数理学会，2012年8月29日，稚内全日空ホテル（北海道・稚内市）.

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.keio.ac.jp/~oda/

６．研究組織
(1)研究代表者
小田　芳彦（ODA YOSHIAKI）
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号：90325043

(2)研究分担者
該当なし

(3)連携研究者
該当なし

(4)研究協力者
渡辺　守（WATANABE MAMORU）