

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 20 日現在

機関番号：32641

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540142

研究課題名(和文) アルゴリズム的情報理論の統計力学的解釈

研究課題名(英文) Statistical mechanical interpretation of algorithmic information theory

研究代表者

只木 孝太郎 (Tadaki, Kohtarō)

中央大学・研究開発機構・機構准教授

研究者番号：70407881

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：アルゴリズム的情報理論はコルモゴロフ複雑度の理論である。コルモゴロフ複雑度は有限2進列の圧縮時のサイズの理論限界値を与えるものである。私はこれまで、アルゴリズム的情報理論の枠組みの中で、プログラムを量子力学系のエネルギー固有状態、プログラム長をそのエネルギーと解釈することにより、これに統計力学的解釈を導入し、研究を進めて来た。これがアルゴリズム的情報理論の統計力学的解釈である。コルモゴロフ複雑度で実数の圧縮率を計測するとき、この解釈では、各種の熱力学的量の圧縮率はその温度に一致し、更に、温度1で相転移が起こる。本研究課題では、この相転移現象の機構の詳細を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：Algorithmic information theory is a theory of program-size complexity, where program-size complexity gives the theoretical limit of the compression of a finite binary string. In our former works, we introduced the statistical mechanical interpretation of algorithmic information theory by identifying a program and its size with an energy eigenstate and its energy, respectively, in a quantum system, and we investigated the properties of the interpretation. In the interpretation, the compression rate of each of all thermodynamic quantities equals to the temperature when we measure the compression rate by program-size complexity, and moreover, the phase transition happens when the temperature exceeds 1. In this KAKENHI research, we have revealed the detail of the mechanism of the phase transition.

研究分野：アルゴリズム的ランダムネス

キーワード：アルゴリズム的情報理論 アルゴリズム的ランダムネス 統計力学 partial randomness 相転移 Cha
itinの 不動点 ランダムネス

1. 研究開始当初の背景

本研究課題開始当初の背景は以下の通りである。はじめに、準備として、本研究課題が立脚する基本事項について解説する。

[基本事項1: アルゴリズム的情報理論]

0 と 1 からなる有限列 s のコルモゴロフ複雑度 $K(s)$ は、万能アルゴリズム U に s を出力させる入力 (プログラム) のうち、最短のもの長さとして定義される。この定義から $K(s)$ は s の圧縮時のサイズを表わし、言い換えると、万能アルゴリズムである U でさえ圧縮し切れない、 s のランダムな部分の量を表している。 $K(s)$ のこの定義を出発点とする理論は、アルゴリズム的情報理論と呼ばれる。

アルゴリズム的情報理論の重要な研究主題の一つに、実数のランダム性の特徴付けがある。実数の二進展開を考えたとき、その接頭語が漸近的に $K(s)$ で圧縮できない (即ち圧縮率が 1 にとどまる) 実数を、“ランダムである” と定義するのである。

アルゴリズム的情報理論の創始者の一人であるチェイティンは、そのようなランダムな実数の具体例として、今日、魔法の数と呼ばれる Ω を導入した。 Ω は U が停止する確率として定義されるが、多くの著しい性質を持ち、アルゴリズム的情報理論の理論展開で決定的な役割を果たす。例えば、チェイティンは Ω に基づいて、ゲーデルの第一不完全性定理の定量化版を導いた。このように、アルゴリズム的情報理論は単に情報圧縮の理論的限界を取り扱う理論にとどまらず、チェイティンの研究により、アルゴリズム的情報理論の枠組みの中で、数学的真理が持つランダムな構造が明らかにされた。

私は論文[A] (本節末参照) で、チェイティンの研究の拡張と一般化を行った。特に Ω を一般化した、圧縮率が丁度 D に等しい実数 $\Omega(D)$ を導入した。ここで D は 1 以下の正の実数であり、 $D=1$ の場合が従来の Ω である (即ち $\Omega(1) = \Omega$ である)。 $\Omega(D)$ は、 U の全てのプログラムを用いて、その総和として定義される。

[基本事項2: 統計力学]

統計力学において分配関数 $Z(T)$ は特別重要な役割を果たす。ここで T は統計力学的系の温度を表わす。 $Z(T)$ は、系の全てのエネルギー固有状態を用いて、その総和として定義される。系のエントロピー $S(T)$ 、自由エネルギー $F(T)$ 、エネルギー $E(T)$ 、比熱 $C(T)$ など、系の全ての熱力学的量は $Z(T)$ を用いて表現できる。従って、 $Z(T)$ についての知識は、系の巨視的性質の全てを決定するのに十分であり、分配関数 $Z(T)$ は統計力学の理論の中核にある概念である。

本研究課題の基本事項の解説は以上の通りである。

さて、カルーデとステイは論文[B] (本節末

参照) で、私が論文[A] で導入した様々な概念について研究を進めた。その中で彼らは、分配関数 $Z(T)$ で、次の置き換えを行うと、 $T=D$ として $\Omega(D)$ が得られることを指摘した:

「統計力学的系のエネルギー固有状態を U のプログラムで置き換える」

私は、この指摘に示唆され、統計力学的系のエントロピー $S(T)$ 、自由エネルギー $F(T)$ 、エネルギー $E(T)$ 、比熱 $C(T)$ の全てについて、上記の置き換えを行い、得られたアルゴリズム的情報理論の熱力学的量について研究を進めた。そして、これらアルゴリズム的情報理論の熱力学的量の圧縮率を $K(s)$ で計測してみたところ、どの量についても、それは温度 T に等しいということを実証した。即ち、上記の置き換えがもたらすアルゴリズム的情報理論の統計力学的解釈においては、熱力学的量の圧縮率は、温度に等しいのである。

更に、この状況は、それ自身が典型的な熱力学的量である温度自身についても成り立ち、温度の圧縮率はその温度に等しい事を私は証明した。即ち、圧縮率に関する不動点定理を証明したのである。この不動点定理は、統計力学の文脈から離れて、純粋に数学 (アルゴリズム的情報理論) の結果としても、とても非自明なものである。本研究は、世界の第一線で活躍するアルゴリズム的情報理論の多くの研究者から高い評価を受けている。例えば、前出のカルーデも本研究を高く評価し、彼が教授を務めるオークランド大学 (ニュージーランド) や、各種の国際会議に、私を招聘した。

本研究は、上述の通り、まず純粋に数学の研究としてブレークスルーを果たしたと私は考える。圧縮率に関する不動点定理がその主要な成果であるが、その証明はアルゴリズム的情報理論で解析的手法が使えること意味する。即ち、本研究はアルゴリズム的情報理論の研究に初めて解析的手法を導入したのである。

ところで、アルゴリズム的情報理論の統計力学的解釈は、単なる数学理論ではなく、エネルギー固有値が U のプログラムの長さに一致する系を考えることにより、原理的には実際の物理系で実現できるものである。従って、本研究は、物理学に関する研究としても非常に重要な意義を持つものであり、統計熱力学において、温度の持つ計算論的な意味について明らかにするものだと、私は考えている。

[A] K. Tadaki, A generalization of Chaitin's halting probability Ω and halting self-similar sets. Hokkaido Mathematical Journal, Vol.31, 2002, 219 - 253.

[B] C. S. Calude and M. A. Stay, Natural halting probabilities, partial randomness, and zeta

2. 研究の目的

前節で解説した通り、これまでの研究で私は、アルゴリズムの情報理論と統計力学を密接に関係付けるアルゴリズムの情報理論の統計力学的解釈を創始した。現在私は、それに基づいて、新しい科学を創設しようと試みている。本研究課題は、この全体構想を実現するための一環であり、具体的には以下を目的とした。

(1) アルゴリズムの情報理論の統計力学的解釈に現れるルジャンドル変換の持つ数学的意味を明らかにし、それに基づいて、アルゴリズムの情報理論における解析的手法の枠組みを構築する。

(2) アルゴリズムの情報理論の統計力学的解釈に現れる相転移現象の数学的な機構について詳細に調べる。

(3) そして、これら(1)と(2)の研究成果を合わせ、この相転移現象の計算論的内容と物理的な意義を明らかにする。

3. 研究の方法

アルゴリズムの情報理論の統計力学的解釈は、本来、現実世界を記述する物理学の一分野であり、特に、統計力学を研究対象としている。

しかしながら、本研究課題は、アルゴリズムの情報理論の統計力学的解釈の、特に、数学的な側面を研究しようとするものであり、物理実験の必要はなく、また計算機実験なども通用しない純粋に理論的な考察のみから成る研究である。従って、研究推進者である私が、如何に効率良く関連情報を収集し、本研究課題の着想を如何に拡充するかが、本研究成功の鍵となる。

そのために、以下の点に留意し研究を進めた：研究期間中は関連する国際会議・国内会議に参加し、まず自身で発表を行い、それに関して他の研究者との意見交換を行う。同時に、他の研究者により発表される様々な研究を聴講し、本研究課題の成就に繋がり得る情報収集を行う。更に、国の内外を問わず、当該分野で優れた業績を挙げている研究者を招聘し、研究交流をはかる。また、私が勤務する中央大学研究開発機構の日常の研究活動においては、必要となる様々な文献に目を通し、本研究課題の着想を育み、本研究課題の達成を目指す。

4. 研究成果

本研究課題の研究期間である平成24年度から平成26年度までの各年度に行った研究活動と得られた研究成果は、以下の通りである。

(1) 平成24年度の活動と成果

私がこれまでの研究で行った、圧縮率に関する不動点定理の証明を通じて、アルゴリズムの情報理論の統計力学的解釈における熱力学的関係式の重要性が、既に明らかになっている。平成24年度は、この熱力学的関係式を手掛かりとして、アルゴリズムの情報理論と熱力学との形式的対応を、更に追求した。特にアルゴリズムの情報理論におけるルジャンドル変換の数学的性質を使用し、圧縮率に関する不動点の新しい性質を明らかにした。平成24年度は、このようにして、アルゴリズムの情報理論におけるルジャンドル変換の持つ数学的意味について、理解を深めた。

統計力学はカオスと極めて深い関係にある。ニュージーランド・マッセイ大学のカルーデ博士は、本研究課題の推進のために必須であるカオス理論と計算可能性理論および理論計算機科学との関わり合いに関する専門家である。平成24年度は、特に、カルーデ博士を中央大学研究開発機構に招聘し、直接相対して、アルゴリズムの情報理論の統計力学的解釈に関する助言ならびに、本研究全般にわたる情報およびコメントの提供を受けた。これにより、本研究は効率よく進展し、その成果の一つとして、私は、温度 $T=1$ における1方向性から2方向性への相転移現象を理解するため、新たに、strong predictability の概念を導入することが出来た。この概念により、温度 $T=1$ における相転移現象の数学的および計算論的内容について、理解が大きく深まった。

(2) 平成25年度の活動と成果

平成25年度、平成24年度の研究成果として得られた、アルゴリズムの情報理論におけるルジャンドル変換の持つ数学的意味についての理解に基づいて、アルゴリズムの情報理論における解析的手法の一般的枠組みの構築に着手した。そして圧縮率に関する不動点定理に解析的手法を投入して、不動点に関する理解を深め、その成果を、平成25年9月に中国・広州で開催された国際会議 The 13th Asian Logic Conference (ALC2013) で発表した(招待講演)。

更に、温度 $T=1$ における1方向性から2方向性への相転移現象を理解するために、前年度に導入した strong predictability の概念について、その性質を詳細に調べた。その結果、温度 $T=1$ における相転移現象の数学的及び計算論的内容について、予想外の深い理解を得ることができ、相転移現象の数学的な機構の解明が進んだ。その成果は国際会議 Unconventional Computation & Natural Computing 2014 (UCNC 2014) に投稿した。これは平成26年4月に受理され、平成26年7月にカナダの University of Western Ontario で発表することが確定した。

(3) 平成26年度の活動と成果

平成26年度は、平成25年度までに得たアルゴリズム的情報理論の統計力学的解釈におけるルジャンドル変換の役割の理解と、それまでに導入した strong predictability などの概念に基づく相転移現象についての数学的な理解を統合し、アルゴリズム的情報理論の統計力学的解釈の相転移現象の計算論的内容と、その物理的内容について理解を深化させた。特に、アルゴリズム的情報理論の統計力学的解釈とランダウアーの原理との緊密な対応について理解を深めた。

そして、統計力学一般が立脚する確率論について、熱力学における相転移現象を意識しながら根源的な考察を進めることにより、「アルゴリズム的ランダムネスによる確率概念の操作的特徴付け」を新たに導入・発展させることが出来た。これにより、アルゴリズム的情報理論の統計力学的解釈の物理的な理解が著しく進み、特に、この「アルゴリズム的ランダムネスによる確率概念の操作的特徴付け」に基づいて、統計力学が立脚する量子力学そのものの原理的な精密化に成功した。そして、この精密化に基づいて、アルゴリズム的情報理論の統計力学的解釈の今後の発展について、具体的な展望を得ることが出来た。

平成26年度は、当該研究成果について、海外及び国内で積極的に発表を行い、他の研究者との交流を更に推進した。特に、研究代表者は、平成26年6月にシンガポールの National University of Singapore で開催された国際共同研究プログラム “Algorithmic Randomness” に招聘され、世界のアルゴリズム的情報理論の研究者との交流を深めつつ、本研究課題を効率的に推進した。

そして、平成26年7月に、国際会議 UCNC 2014 において、前年度までに得られていた strong predictability に関する研究成果を発表したところ、参加者から大きな反響を得た。昨今隆盛を極める量子コンピュータ研究のさきがけとなったトフォリゲート(可逆論理ゲート)で著名なボストン大学のトフォリ教授からは、私の関連論文一式を求められた。また、カオス理論とスーパーチューリングマシンの研究で著名なマサチューセッツ大学アマースト校のジゲルマン教授からは “You made a good presentation” と賞賛の言葉を頂いた。このように本研究は、国際会議 UCNC 2014 に参加のため世界中から集まった第一線で活躍する研究者から、大きく注目を集めた。

また、国内においては、上述の「アルゴリズム的ランダムネスによる確率概念の操作的特徴付け」と、関連する成果を様々な研究集会で発表した。そしてそれらの参加者から、特に、エルゴード理論で著名なマイケル・S・キーン教授(ウェズリアン大学)や、アルゴリズム的情報理論で著名なコーサイノフ教

授(オークランド大学)から絶賛を受けた。

更に、本研究課題「アルゴリズム的情報理論の統計力学的解釈」の研究成果について総括し解説する論説を、日本数学会編 雑誌‘数学’で発表し、反響を得た。

(4) まとめ

上記で説明した通り、本研究課題では、第2節で示した研究目的(1)(2)(3)を達成することができた。更に「アルゴリズム的ランダムネスによる確率概念の操作的特徴付け」など新たな発展も得られ、アルゴリズム的情報理論の統計力学的解釈の今後の発展について確固たる展望が得られた。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計4件)

只木孝太郎、アルゴリズム的情報理論の統計力学的解釈(論説)、雑誌‘数学’、日本数学会編集、岩波書店発売、査読有、67巻1号、2015、pp.1-25

Kohtaro Tadaki, Phase Transition and Strong Predictability, *Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, 査読有, Vol.8553, 2014, pp.340-352
DOI:10.1007/978-3-319-08123-6_28

Kohtaro Tadaki, A statistical mechanical interpretation of algorithmic information theory III: Composite systems and fixed points. Special Issue of the CiE 2010 Special Session on Computability of the Physical, *Mathematical Structures in Computer Science*, 査読有, Vol.22, 2012, pp.752-770
DOI: 10.1017/S096012951100051X

只木孝太郎、情報理論における情報源符号化の統計力学的解釈、素粒子論研究・電子版、査読無、Vol.13、No.1、2012

URL:

<http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~soken.editorial/sokendenshi/vol13/yitp11.pdf>

[学会発表](計14件)

Kohtaro Tadaki, An operational characterization of the notion of probability by algorithmic randomness and its applications, Tenth International Conference on Computability, Complexity and Randomness (CCR 2015), June 22-26, 2015, Heidelberg University, Heidelberg, Germany <発表決定>

只木孝太郎、アルゴリズム的ランダムネスによる確率概念の操作的特徴付け、日本数学会2015年度年会、2015年3月22日、明治大学駿河台キャンパス(東京都・千代田区)

Kohtaro Tadaki, A refinement of quantum

mechanics by algorithmic randomness, Presentation at Quantum Computation, Quantum Information, and the Exact Sciences (QCOMPINFO2015), January 31, 2015, Ludwig-Maximilians-Universität München, Munich, Germany

只木孝太郎, An operational characterization of the notion of probability by algorithmic randomness and its application to cryptography, 2015 年 暗号と情報セキュリティシンポジウム (SCIS2015)、2015 年 1 月 21 日、リーガロイヤルホテル小倉 (福岡県・北九州市)

只木孝太郎, The principle of typicality: A refinement of quantum mechanics by algorithmic randomness, RIMS 研究集会「証明論・計算論とその周辺」, 2014, 2014 年 12 月 25 日、京都大学 数理解析研究所 (京都府・京都市)

只木孝太郎, アルゴリズム的ランダムネスによる量子力学の再構成、数理解析研究所研究集会「確率論シンポジウム」, 2014 年 12 月 18 日、京都大学 数理解析研究所 (京都府・京都市)

只木孝太郎, An operational characterization of the notion of probability by algorithmic randomness, 第 37 回 情報理論とその応用シンポジウム (SITA2014), 2014 年 12 月 11 日、宇奈月ニューオータニホテル (富山県・黒部市)

只木孝太郎, An operational characterization of the notion of probability by algorithmic randomness, 研究集会「エルゴード理論とその周辺 (Ergodic Theory and Related Fields)」, 2014 年 12 月 2 日、放送大学 熊本学習センター (熊本県・熊本市)

只木孝太郎, アルゴリズム的ランダムネスによる量子力学の再構成、日本数学会 2014 年度秋季総合分科会、2014 年 9 月 27 日、広島大学 東広島キャンパス (広島県・東広島市)

Kohtaro Tadaki, Reformulating quantum mechanics by algorithmic randomness, Kohtaro Tadaki, Ninth International Conference on Computability, Complexity and Randomness (CCR 2014), June 9, 2014, National University of Singapore, Singapore **<招待講演>**

只木孝太郎, A reformulation of quantum mechanics by algorithmic randomness, 第 30 回 量子情報技術研究会 (QIT30)、2014 年 5 月 13 日、名古屋大学 豊田講堂シンポジオン (愛知県・名古屋市)

Kohtaro Tadaki, Recent developments in

statistical mechanical interpretation of algorithmic information theory, September 20, 2013, Sun Yat-sen University, Guangzhou, China **<招待講演>**

只木孝太郎, Phase transition and strong predictability, 2013 年度 夏の LA、LA シンポジウム、2013 年 7 月 16 日、休暇村 志賀島 (福岡県・福岡市)

只木孝太郎, アルゴリズム的ランダムネス入門、数学基礎論サマースクール 2012、2012 年 9 月 5 日、東京工業大学 大岡山キャンパス (東京都・目黒区)

〔その他〕
ホームページ等
<http://www2.odn.ne.jp/tadaki/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

只木 孝太郎 (TADAKI, Kohtaro)
中央大学・研究開発機構・機構准教授
研究者番号: 70407881