様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ５ 月 ２６ 日現在

機関番号：３２６６０
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４０１６３

研究課題名（和文）非線形シュレディンガー方程式の孤立波の不安定性に関する研究

研究課題名（英文）Studies on instability of solitary waves for nonlinear Schroedinger equations

研究代表者
太田　雅人（Ohta, Masahito）

東京理科大学・理学部・准教授

研究者番号：００２９１３９４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　4,000,000円

研究成果の概要（和文）：一般化された微分型非線形シュレディンガー方程式の孤立波解の軌道不安定性について研究した。この方程式は2つのパラメータに依存する孤立波解の族を持つ。孤立波解のパラメータ領域において安定性と不安定性の境目となる曲線を決定した。
二重冪型非線形シュレディンガー方程式と引力的なデルタ関数をポテンシャルとして含む空間１次元の非線形シュレディンガー方程式に対して、定在波解が強不安定となるための十分条件を与えた。ここで、孤立波解のどんな近くにも有限時間で爆発する解が存在するとき、その孤立波解は強不安定であるという。

研究成果の概要（英文）：We studied orbital instability of solitary wave solutions for a generalized nonlinear Schroedinger equation of derivative type. This equation has a two-parameter family of solitary wave solutions. We determined the borderline curve between stability and instability of solitary wave solutions in the parameter domain.
We gave a sufficient condition for strong instability of standing wave solutions for nonlinear Schroedinger equations with double power nonlinearity and for nonlinear Schroedinger equations with an attractive delta potential in one space dimension. Here, a solitary wave solution is said to be strongly unstable if there exists a solution that blows up in finite time in any small neighborhood of the solitary wave solutions.

研究分野：非線形偏微分方程式論

キーワード：非線形シュレディンガー方程式　孤立波　定在波　安定性

１．研究開始当初の背景

非線形シュレディンガー方程式の孤立波解の軌道安定性（リアプノフ安定性）と不安定性に関する数学的研究は 1980 年代初頭の Berestycki-Cazenave (1981) や Cazenave-Lions (1982) などに始まり、その後、Grillakis-Shatah-Strauss (1987,1990) により、非線形シュレディンガー方程式や非線形クライン・ゴルドン方程式を含む抽象ハミルトン系に対する一般論としてまとめられた。Grillakis-Shatah-Strauss による一般論は多くの具体的な問題に応用されてきたが、これまでの研究の多くは基底状態に対するものであり、より高いエネルギー（正確には作用）レベルをもつ励起状態に対する研究はあまり進んでいない。励起状態はすべて不安定であろうと多くの研究者により漠然と考えられているが、非自明な定常解の中で、最小の作用をもつ解を基底状態といい、それ以外を励起状態と呼ぶという従来の定義に従うと、連立方程式系に対しては、励起状態でも安定なものが存在することは、研究代表者の 1996 年の論文ですでに示されており、さらに最近の M. Colin との共著論文 (2012) でも別の方程式系に対して証明されている。このような安定な励起状態の存在と多くの数学者の信念との矛盾を解消するために、特に、連立方程式系に対して、従来の励起状態の定義を修正し、その不安定性に関する統一的な理解を得る必要があると考えた。

２．研究の目的

非線形光学やボーズ・アインシュタイン凝縮などの物理モデルとして現れる、様々な非線形相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式及び方程式系の孤立波解の大域構造及び安定性・不安定性について研究する。特に、励起状態の不安定性に関する統一的な理解を得ることを目的とする。また、現在の標準理論である Grillakis-Shatah-Strauss による一般論を根本から見直し、孤立波解の不安定性に関する新たな理論を構築する。その応用例として、一般化された微分型非線形シュレディンガー方程式の孤立波解の不安定性を証明する。

　また、従来からよく研究されている、孤立波解の 1-パラメータ族に対する安定性や不安定性の理論を多パラメータの場合に拡張することを目的とする。

　さらに、不安定性に関しては、局所理論である軌道不安定性だけでなく、孤立波解の任意の近傍に有限時間で爆発する解が存在するかどうかという強不安定性についても研究を行い、解空間の大域的な構造の理解を深めることも目的である。

３．研究の方法

励起状態の不安定性について研究している国内外の研究者と意見交換を行い、従来の一般論を再検討するともに、具体例の計算を通して理解を深める。そのために、東京理科大学で定期的に開催している、神楽坂解析セミナーを活用するとともに、そのほかに、神楽坂非線形波動研究会を開催した。

また、1-パラメータ族の孤立波解に対する安定性と不安定性の理論を 2-パラメータ族の場合に拡張し、一般化された微分型非線形シュレディンガー方程式に適用する。

４．研究成果

（１）一般化された微分型非線形シュレディンガー方程式の孤立波解の軌道不安定性を証明した。この方程式は本質的に２つのパラメータに依存する孤立波解の族を持つ点に特徴がある。当初は、孤立波解のまわりの線形化作用素のスペクトル解析に基づいて証明していたが、他の方程式への応用も考慮して、最終的には孤立波解の変分的特徴づけを利用した証明に書き直した。結果として、孤立波解のパラメータ領域において安定性と不安定性の境目となる曲線を決定した。

（２）二重冪型非線形シュレディンガー方程式と引力的なデルタ関数をポテンシャルとして含む空間１次元の非線形シュレディンガー方程式に対して、定在波解が強不安定となるための十分条件を与えた。ここで、孤立波解のどんな近くにも有限時間で爆発する解が存在するとき、その孤立波解は強不安定であるという。特に、デルタ・ポテンシャルを含む非線形シュレディンガー方程式に対しては、定在波解が初等関数で表されるため、軌道不安定性に対する従来の十分条件と今回得られた強不安定性に対する十分条件を数値的に比較することができ、今後の研究に役立つものと考えている。

（３）準線形シュレディンガー方程式の基底状態の軌道不安定性について、M. Colin（ボルドー大学）と共同研究を行った。空間３次元で非線形項が３次の場合、M. Colin, Jeanjean and Squasina (2010) などにより、条件付きで基底状態の安定性が得られていたが、準線形項の係数が十分に小さい場合は、通常の非線形シュレディンガー方程式と同様に、基底状態は軌道不安定であることを示した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　4　件）

① M. Ohta, Instability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations of derivative type, SUT Journal of Mathematics, 50 (2014), 399-415. 査読有
② M. Colin and M. Ohta, Instability of ground states for a quasilinear Schrödinger equation, Differential and Integral Equations, 27 (2014), 613-624. 査読有
③ M. Colin and M. Ohta, Bifurcation from semitrivial standing waves and ground states for a system of nonlinear Schrödinger equations, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 44 (2012), 206-223. 査読有 DOI: 10.1137/110823808
④ V. Georgiev and M. Ohta, Nonlinear instability of linearly unstable standing waves for nonlinear Schrödinger equations, Journal of the Mathematical Society of Japan, 64 (2012), 533-548. 査読有 DOI: 10.2969/jmsj/06420533

〔学会発表〕（計　11　件）

① 太田雅人、Strong instability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, 釧路偏微分方程式研究集会、2014 年 10 月 11 日、北海道教育大学釧路校（北海道・釧路市）
② M. Ohta, Stability and instability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations of derivative type, International Conference "Asymptotic Analysis for Nonlinear Dispersive and Wave Equations" In honor of Professor Nakao Hayashi's 60th birthday, 2014 年 9 月 10 日、大阪大学（大阪府・豊中市）
③ 太田雅人, Strong instability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, RIMS 研究集会「調和解析と非線形偏微分方程式」、2014 年 7 月 1 日、京都大学数理解析研究所（京都府・京都市）
④ M. Ohta, Instability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations of derivative type, Stability of Solitary Waves (Workshop), 2014 年 5 月 28 日、Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi, Pisa（イタリア）
⑤ 太田雅人、非線形シュレディンガー方程式の孤立波の安定性解析、RIMS 研究集会「非線形波動現象の数理と応用」、2013 年 10 月 18 日、京都大学数理解析研究所（京都府・京都市）
⑥ 太田雅人、微分型非線形シュレディンガー方程式の孤立波解の軌道不安定性、南大阪応用数学セミナー、2013 年 6 月 15 日、大阪市立大学（大阪府・大阪市）
⑦ 太田雅人、非線形分散波動方程式の孤立波解に関する諸問題、RIMS 共同研究「非線型現象の数理モデルに現れる近平衡解の時間的漸近挙動に関する研究」、2013 年 1 月 28 日、京都大学数理解析研究所（京都府・京都市）
⑧ 太田雅人, Order estimates of splitting methods for semilinear evolution equations, 第２３回「数理物理と微分方程式」研究集会、2012 年 11 月 4 日、国民宿舎 野呂高原ロッジ（広島県・呉市）
⑨ 太田雅人、Order estimates of splitting methods for semilinear evolution equations、熊本大学応用解析セミナー、2012 年 9 月 29 日、熊本大学（熊本県・熊本市）
⑩ 太田雅人、Splitting methods for semilinear evolution equations with applications to nonlinear Schrödinger equations, 第８回　非線型の諸問題、2012 年 9 月 12 日、宮崎県婦人会館（宮崎県・宮崎市）
⑪ M. Ohta, Splitting methods for semilinear evolution equations with applications to nonlinear Schrödinger equations, The 9th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2012 年 7 月 1 日、Orlando, Florida(アメリカ合衆国)

〔その他〕
ホームページ
http://www.rs.tus.ac.jp/mohta/

６．研究組織

(1)研究代表者

太田　雅人（OHTA, Masahito）
東京理科大学・理学部・准教授
研究者番号：00291394

(2)研究分担者

(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者

(　　　)

研究者番号：