

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 17 日現在

機関番号：13201

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540165

研究課題名(和文)ハミルトン - ヤコビ方程式と対数型ソボレフの不等式の研究

研究課題名(英文)Study for Hamilton-Jacobi equations and logarithmic Sobolev inequality

研究代表者

藤田 安啓 (Fujita, Yasuhiro)

富山大学・大学院理工学研究部(理学)・教授

研究者番号：10209067

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究を通じて、主に以下の3つの成果を得た。まず、Hamilton-Jacobi方程式の解の超縮小性の評価などを使い、 $L_p$ 型の対数型Sobolevの不等式の完全な証明を新たに得ることに成功した。また、この不等式で $p$ にした不等式の持つ性質について、Laplace変換や正則変動理論を用いて、細かい部分まで明らかにすることができた。さらに、Hamilton-Jacobi方程式の解の構造を決定する集合を考察した。この集合は、境界値問題の一意性集合のような働きをする。これらの結果は、研究期間に3本の論文として纏め発表することができた。

研究成果の概要(英文)：Throughout this study, I wrote three papers. First, I gave a new and complete proof of  $L_p$  logarithmic Sobolev inequality by using the hypercontractivity of the solution of some Hamilton-Jacobi equation. Next, I clarified many properties of the inequality which is obtained by letting  $p$  in this  $L_p$  logarithmic Sobolev inequality. This was done by using Laplace transforms and the theory of regular variations. Finally, I investigated the set which determines the structure of solutions of Hamilton-Jacobi equations. This set plays the same role as the uniqueness set for boundary value problems.

研究分野：函数方程式論

キーワード：Hamilton-Jacobi方程式 対数型Sobolevの不等式 Lipschitz正則効果 超縮小性

### 1. 研究開始当初の背景

2010年に、 $L^p$ 型の対数型 Sobolev の不等式で  $p$  にした不等式を導いた。この結果は、Y. Fujita, An optimal logarithmic Sobolev inequality with Lipschitz constants, Journal of Functional Analysis, 261 (2011), 1133-1144 という形で論文として発表された。この論文については、Journal of Functional Analysis というハイレベルな雑誌に載ったこともあり、様々な研究者から興味を持ってもらい、いくつかの研究会で発表を行った。その際に出た質問としては、「この不等式の持つ本質的な性質とは何か」ということと、「どのような応用があるか」というものであった。そこで、この不等式の Hamilton-Jacobi 方程式の解への応用や包含する性質などを考えつつ、これらの実現に興味を持っていた。

一方、元になった  $L^p$  型の対数型 Sobolev の不等式は、I.Gentil 教授によって、I.Gentil, The general optimal  $L^p$  logarithmic Sobolev inequality by Hamilton-Jacobi equations, J. Functional Analysis, 202 (2003) 591-599 で証明が与えられたとされていたが、その証明には不完全な部分があることにも 2011 年の時点では気付いていた。これに完全な証明を与えることにも大いに興味を持っていた。

### 2. 研究の目的

上の研究開始当初の背景に挙げた私の論文に基づき、次の 4 つを主な目的と考えていた：

- (1) 対数型 Sobolev の不等式と Hamilton-Jacobi 方程式の解の超縮小性や Lipschitz 正則効果との関連を明らかにすること。
- (2) この不等式自身の詳しい性質を調べること。
- (3) (1)と(2)の実現のため、Hamilton-Jacobi 方程式の解の精密な評価が必要であり、この評価を導くこと。
- (4)  $L^p$  型の対数型 Sobolev の不等式の完全な証明を与えること。

### 3. 研究の方法

連携協力者や海外の研究者と連絡を密に取りながら、関連する研究会に出席することや研究者を訪問することで、研究の進展を図った。研究者の訪問は国内にとどまらず、関連するローマ第 1 大学の Antonio Siconolfi 教授やリヨン第 1 大学の Ivan Gentil 教授も含まれる。A.Siconolfi 教授からは Hamilton-Jacobi 方程式の解の評価について、I.Gentil 教授からは対数型 Sobolev の不等式について数多く教えてもらった。また、研究に必要な備品(図書、パソコン周辺機器など)

を購入し、研究の進展に役立てた。

一方、得られた結果をいろいろな研究の場で発表すると同時に論文にしていった。また、それらを自分自身のホームページを通じて広報した。

### 4. 研究成果

まず、 $L^p$  型の対数型 Sobolev の不等式で  $p$  にした不等式の包含する性質については、Laplace 変換や正則変動理論を用いて、細かい部分まで明らかにすることができた。主な結果としては、

- (1)  $L^p$  型の対数型 Sobolev の不等式で  $p$  にした不等式での等号成立はいつかということを明らかにした。
- (2) あるパラメータを導入することにより、等号を成立させないようなパラメータが一つでもあれば、そのようなパラメータは非可算個あることを複素解析学の一致の定理を使って証明した。
- (3) 等号を成立させない具体的な函数について、いくつかの例を与えた。また、等号を成立させるための函数については必要十分条件を与えた。
- (4) 正則変動の理論を用いて、(2)で導入したパラメータが無限大に近づくとき、不等式がどのように変化するかを明らかにした。

これらについては、以下の発表論文の(2)に纏められている。

次に、I.Gentil 教授による  $L^p$  型の対数型 Sobolev の不等式の証明の不完全な部分は、以下の発表論文の(1)で埋められ完全な証明として発表された。ここで本質的な役割を果たしたのは、Hamilton-Jacobi 方程式の解の超縮小性を始めとする種々の評価であった。この超縮小性の評価は Prekopa-Leindler の不等式に基づいている。また、Hamilton-Jacobi 方程式の初期値への依存度を表す精密な不等式や実解析学で有用な Fatou の補題を一般化した不等式などが証明で使われた。ここで使用した Fatou の補題を一般化した不等式は、Lebesgue 測度に関するエントロピーを考える際に広く役立つ不等式だと考えている。

この論文の執筆に際しては、最初にこの不等式の証明(不完全な部分はあったが...)を与えた I.Gentil 教授の励ましが大きかった。彼を本研究期間中に訪問出来たのは大いなる幸いであった。

最後に、連携研究者の石井仁司教授との共著で、Hamilton-Jacobi 方程式の解の構造を境界値問題の一意性集合のように決定する集合を考察し決定することができた。これは、以下の発表論文の(3)に纏めることができた。

以上に見るように、当初の研究の目的は、ほぼ満足のいく形で成就されたと言ってよい。特に、 $L^p$  型の対数型 Sobolev の不等式および、その不等式で  $p$  にした不等式については十分な成果を得たと考えている。

一方、Hamilton-Jacobi 方程式の解の Lipschitz 正則効果についてはいくつかの結果を得たが、発表するには至らなかった。これらについては、結果をノートに保管する形で今後の研究に役立てていきたい。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

(1) 藤田安啓, A supplementary proof of  $L^p$ -logarithmic Sobolev inequality, Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse, 査読有 24 (2015), 119-132.  
doi: 10.5802/afst.1444

(2) 藤田安啓, Lipschitz constants and logarithmic Sobolev inequality, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 査読有 408 (2013) 705-712  
doi:10.1016/j.jmaa.2013.06.031

(3) 藤田安啓, 石井仁司, Uniqueness sets for minimization formulas, Differential and Integral Equation, 査読有 25 (2012), 579-588  
[http://projecteuclid.org/download/pdf\\_1/euclid.die/1356012681](http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.die/1356012681)

(4) 石井仁司, A short introduction to viscosity solutions and the large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations, Hamilton-Jacobi equations: approximations, numerical analysis and applications, 査読有 111-249, Lecture Notes in Math., 2074, Springer, Heidelberg, 2013

DOI 10.1007/978-3-642-36433-4

(5) 石井克幸, An approximation scheme for the anisotropic and nonlocal mean curvature flows, 査読有, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., 21(2014), 219-252

DOI 10.1007/s00030-013-0244-z

[学会発表](計9件)

(1) 藤田安啓, Hamilton-Jacobi 方程式における Lipschitz 正則効果の立ち上がり

の rate について, 第 12 回浜松偏微分方程式研究会, 2014.12.23, 静岡大学工学部

(2) 藤田安啓, From Hamilton-Jacobi equation to logarithmic Sobolev inequality with Lipschitz constants, THE NINTH MEETING ON PROBABILITY AND PDE, 2014.11.14, 津田塾大学小平キャンパス

(3) 藤田安啓, A proof of  $L^p$ -logarithmic Sobolev inequality via several approximations, 研究会「確率解析とその周辺」, 2014.10.15, 東北大学大学院理学研究科

(4) 藤田安啓, ルベーク測度に関する対数型ソボレフの不等式とその応用, 2014 年度松江セミナー, 2014.06.27, 島根大学総合理工学部

(5) 藤田安啓, Asymptotic behavior to Hamilton--Jacobi--Bellman equation via logarithmic Sobolev inequality, Stochastic Processes and Mathematical Finance, 2014.02.24, 関西大学

(6) 藤田安啓, 対数型 Sobolev の不等式による Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式へのアプローチ, 広島数理解析セミナー, 2013.07.26, 広島大学

(7) 藤田安啓,  $p$ -parabolic equation and logarithmic Sobolev inequality, Partial Differential Equations Fukae Work Shop, 2013.01.26, 神戸大学海事科学部

(8) 藤田安啓,  $p$ -放物型方程式の解の超縮小性と対数型ソボレフの不等式, 第 93 回熊本大学応用解析セミナー, 2012.11.10, 熊本大学

(9) 藤田安啓, Parabolic  $p$ -Laplace equation and logarithmic Sobolev inequality, 九州関数方程式セミナー, 2012.07.13, 福岡大学六本松セミナーハウス

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕  
ホームページ等  
[http://www.sci.u-toyama.ac.jp/~yfujita/  
index.html](http://www.sci.u-toyama.ac.jp/~yfujita/index.html)

## 6．研究組織

### (1)研究代表者

藤田 安啓 (YASUHIRO FUJITA)  
富山大学・大学院理工学研究部 (理学) 教授  
研究者番号：10209067

### (2)研究分担者

なし

### (3)連携研究者

石井 仁司 (HITOSHI ISHII)  
早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授  
研究者番号：70102887

石井 克幸 (KATSUYUKI ISHII)  
神戸大学・海事科学部・教授  
研究者番号：40232227