

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 13 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540168

研究課題名(和文) ボーズ・アインシュタイン凝縮の作用素値確率変数を用いたアプローチ

研究課題名(英文) An approach to Bose-Einstein condensation in terms of operator valued random variables

研究代表者

田村 博志 (Tamura, Hiroshi)

金沢大学・機械工学系・教授

研究者番号：80188440

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：1自由度の量子振動子に何回も摂動が繰り返されるような力学系であって、その時間発展が具体的に示されるという意味で解けるモデルを提案し、その性質を調べた。

孤立系の場合は、その時間発展はハミルトニアンで表わされ、系の状態の定常状態への緩和や、それに伴うエントロピー生成の様子が具体的に示された。それに関連する一種の中心極限定理も得た。また、拡散系の場合を記述するため、コサコフスキー型の非有界作用素を生成元とする、トレースを保存する強連続半群を構成した。物理的応用として興味のある部分系の漸近挙動も調べ、それが自由な時間発展となる事を示した。

研究成果の概要(英文)：An exactly soluble dynamical system generated by repeated harmonic perturbations of the one-mode quantum oscillator is proposed and examined.

For the case of isolated system, although the dynamics is given by Hamiltonian, it shows relaxation to the steady state in the large-time limit. The relaxation is accompanied by the entropy production. A universality of the dynamics in a certain short-interaction-time limit is also obtained.

To study the case of the dissipative system, unbounded Kossakowski-Lindblad-Davies generators are considered. The existence of uniquely determined minimal trace-preserving strongly continuous dynamical semigroups on the space of density matrices are proved. The corresponding dual W^* -dynamical system is shown to be unital quasi-free and completely positive automorphisms of the CCR-algebra. The long-time asymptotic behaviour of various subsystems of the model are treated in the framework of the W^* -dynamical system approach.

研究分野：数理物理学

キーワード：量子力学系 反復摂動 調和振動子 密度行列 開放系の発展方程式 非平衡定常状態 部分系の時間発展

1. 研究開始当初の背景

研究課題名にあるボーズ・アインシュタイン凝縮に関する研究は、目ぼしい成果を得られなかったが、副次的な研究課題として挙げた非平衡統計力学に関する研究が一定の成果を収めたので、以下ではそれについて報告する。

(1) 非平衡の物理現象は多岐にわたり、その平衡からの解離の大きさに依って様々な状態が現れる。その中で、非平衡統計力学の対象は比較的平衡状態に近い現象を扱うものと思われる。

数学的観点から非平衡状態の特徴をとらえるために、議論の対象となる主題としては、「平衡状態への緩和」、「エントロピー生成」、「非平衡定常状態」等があげられる。

そして、具体的な数学的に理想化されたモデルを設定し、数学の緒概念を用いて解析を行う事によって、これらのメカニズムの研究が進展している。

(2) その一つのモデルとして、反復摂動 (repeated perturbation 或いは repeated interaction) がある。これは、原子の列があって、各々の原子が空洞内を一つづつ次々に通過して行き、各原子は空洞内にあるとき、その時だけ空洞内の輻射場と相互作用している様な系をモデル化したものである。

空洞内の輻射場の立場から見れば、相互作用した原子が次々に入れ替わって行き、ひとたび空洞から離れれば2度と現れないという意味で開放系であり、非平衡現象の典型的な一側面を取り出したものになっている。そして、原子列の初期状態が一様であれば空洞輻射の状態が長時間極限では何らかの意味で定常状態に近づく事が期待される点で、非平衡定常状態の議論にも適している。

(3) これらの要素を、具体化したモデルとしては、空洞輻射として1自由度の調和振動子を考え、そこを通過する原子として、2順位のみを持つ系 (qubit 或いは spin) を想定するものがしばしば用いられる。このモデルは十分簡潔であり、上記のエントロピー生成や定常状態への緩和などの豊富な物理的内容を数学的に厳密に取り扱うことが可能である。しかしこの単純化されたモデルでも、その数学的結果はいわゆる存在証明的なもので具体的に明瞭な解が表示されるほど単純ではない。

2. 研究の目的

(1) 上に述べた状況を観るに、より具体的な解の表示が可能なモデルを扱うことに依り、この一連の研究の目指すものを明確に見通せるようになれば、この方向の研究の進展に寄与できると考えた。そこで、原子として、2順位系の代わりに調和振動子を採用してみよう。そうすれば、殆どどの計算は自明に遂行可能であるし、また、関連するCCR環の理論も整理されていて使いやすい。これら

を用いて、特に、物理系の定常状態への緩和現象の再現、それに伴うエントロピーの生成、また、個々の原子と空洞輻射の間の相互作用を小さくするとともに、原子列を長くする極限における漸近状態の記述として1種の中心極限定理を考える事を試みた。

(2) このモデルは、上に述べたようにこれ自身開放系のモデルだが、これにさらに(暗黙的な)熱浴との相互作用を設定し、それによる拡散現象をも考え、空洞を含めた部分系の長時間漸近挙動を考える事も興味深い。そのためのテクニカルな問題として、密度行列の時間発展を与えるためのフォック空間上のトレース族作用素の空間におけるトレースを保存する強連続半群の構成も必要になり、これも研究の大事な目的の一つである。

(3) さらに、コップの中に水を入れ室内に放置したときの様に、微視的に見ればコップの中にある水分子が空気中に飛び出たり、空気中の水蒸気の水分子がコップの中の液体に飛び込んだりの動きはあるものの、巨視的に見れば止まっている様に見えない状態(動的平衡状態)を記述する単純な数理モデルとしてこの反復摂動のモデルをとらえ、どのような数学的スキームが適しているか試みることも目的の一つである。

3. 研究の方法

孤立系(拡散の無い場合)の解析には、ヒルベルト空間上の自己共役作用素のスペクトル分解を基本的な手法として用い様々な物理量を計算する。

拡散を伴う系に対しては、トレース族作用素全体における発展方程式の解を与える強連続半群に関する加藤-Daviesの理論がある。それを基に作用素解析的手法でこのモデルに対しトレースを保存する強連続半群を構成する。双対空間である有界作用素全体における、対応する双対半群の完全正性や準自由性を導く。CCR環へ作用を制限したうえで、双対半群の汎弱位相の下での点列収束の意味で、状態の漸近的挙動を論ずる。

動的平衡を再現する数理モデルを構成する立場から、構成要素が入れ替わる部分系を扱うためフォック空間の次数の異なるテンソル積の列を導入し、各々のテンソル積ヒルベルト空間上のトレース族作用素全体と対応するCCR環の間に双対対合を設定する。その下で、テンソル積の次数の低い空間への縮約を用いて動的部分系とその時間発展を記述する。

4. 研究成果

(1) モデル

十分大きい有限の自由度を持つフォック空間に、生成消滅作用素の2次式で与えられるゲージ不変な時間依存する自己共役作用素をハミルトニアンとして採用する。0番目の生成消滅作用素(空洞輻射の生成消滅に対応する)は、決められた一定の時間間隔に1

番目のモード（原子列に属する最初の原子）とのみ相互作用し、そのすぐあとの次の同じ時間間隔には2番目のモード（原子列の2番目の原子）とだけ相互作用する、以下同様に次々と相手を変えて相互作用する状況を記述する時間に依存するハミルトニアンを設定する。

(2) 孤立系（雑誌論文）

上記のハミルトニアンの下での時間発展について、

ワイル作用素の表す物理量の時間発展を表す式を具体的に求める事に依り、CCR環上に作用するユニタリ群を明示的に与えた。

CCR環上の準自由状態に対しそのエントロピーの時間変化を計算した。また、初期状態として、各モードが互いに相関のない熱平衡状態にあり、さらに原子列の各原子の状態が等しいとき（その状態をSとする）ときについて、様々な部分系に関する状態の時間発展を調べた。特に、空洞輻射の局所状態はSに対応する平衡状態に漸近的に収束するが、その状態の局所エントロピーは空洞輻射の初期状態とSの関係に依って、増加する事も減少する事もある事が示された。

初期状態が、互いに相関は無いが熱平衡状態ではない場合に対しても、初期状態に関するある条件の下では、空洞輻射と相互作用する時間間隔が短くなるとともにモードの総数が大きくなる適当なスケールリングの下で全てのモードの相互作用が終わった段階での空洞輻射の縮約状態はある熱平衡状態に収束することが示された。これは一種の中心極限定理の形になっている。

さらに、動的平衡状態の単純化された数理モデルを目指して、構成粒子が入れ替わる様な部分系を記述するため、自由度の異なるフォック空間相互の写像を設定し、その上の状態の空間と観測量の空間の双対に関する議論の枠組みを与えた。また、これを用い、初期状態が相関のない熱平衡状態の場合に、この部分系の縮約密度関数の極限と局所エントロピーの極限を求め、その2つの極限が整合する事が確かめられた。

(3) 拡散系の時間発展（雑誌論文）

上記の系が、さらに外部の熱浴と相互作用している場合を想定して、密度行列の時間発展を表す方程式に上記のハミルトニアンに依る項に加えて拡散を司る項として、Kossakowski-Lindblad-Davies[KLD]型の項を加えたマスター方程式を考える。この方程式は、ハミルトニアンやKLD項が有界作用素である場合には、その解を与えるトレース族の空間に作用する縮小半群がトレースを保存する完全正の作用素である等、物理的要請と適合している事が知られている。それに対して、我々のモデルの様な非有界な項からなるマスター方程式のときは、対応する縮小半群に関してはトレースが保存しない例があるなどの事情があって、その一般論は確立さ

れていない。

しかし、我々のモデルの場合には、密度行列の時間発展が、実際にトレースを保存する強連続縮小半群に依って記述される事を示すことに成功した。その基本的アイデアは、以下のとおりである。元々の困難の原因は、KLD項を二つに分け、一方はハミルトニアンと共に主要項とし、残りの項を摂動とみなすのだが、摂動項の主要項に対する比が境界値にあるため摂動論が適応できない点にある。そして、この境界値となる理由はトレースを保存するためのモデルの設定と深く関係していて、物理的に興味のあるモデルはこの困難を回避できない点にある。我々のアイデアは、ゲージ変換に依って主要項は不変だが、摂動項は変化する事を利用して、摂動項を小さくしてから摂動論を適応する点にある。

このようにしてトレース族の空間上の半群を構成したのち、その双対をとる事に依り、有界作用素の空間の半群を導入する。この半群をワイル作用素に作用させると、その結果が簡潔な式で具体的に表現できることがわかり、これを用いて、この双対半群が完全正かつ準自由となることが示された。

(4) 拡散系の部分系の時間発展（雑誌論文）

上で述べた拡散のある場合の時間発展の結論を、(2)と同様に、初期状態において各モードが互いに相関がなく、原子列に属する各原子の状態が等しい状態にある場合について、様々な部分系に関する状態の時間発展を調べた。

ここでは、各モードの初期状態を熱平衡状態とは限らない一般の正規状態とした。先ず、ゲージ不変な初期状態に対しては、ある仮定の下で部分系の長時間の漸近的挙動は、ある正規状態への汎弱収束となる事が示された。また、各モードがゲージ不変でない初期状態の場合に対しての、長時間の漸近的挙動は、ある正規状態への単なる汎弱収束ではなく、物理的な自由発展に対応する、時間依存する正規状態と同様に振舞うことが示された。

特に、動的平衡状態を想定した設定の下で同様の漸近的状況が現れた。

初期状態がゲージ不変でない場合の漸近挙動が自由な時間発展となる事に関して、空洞輻射の固有の時間発展を表すパラメータ（エネルギー）と原子列に属する各原子の時間発展のパラメータが異なる時（原子列の各原子は基本的に同じパラメータを持つとしている）漸近挙動の自由な時間発展に対応する（エネルギー）パラメータは原子のそれと同じになるとの結果も得た。

これは興味深い現象であり、これを分かりやすく説明するための具体的例として、初期状態がコヒーレント状態である場合を調べた。それによると、空洞輻射が原子列との相互作用によって自由発展状態に移行する模様が、古典的な強制振動と同様のメカニズムを持

っている事が明らかとなった。つまり、空洞輻射は、毎回各原子と相互作用し、その間それぞれ自身の時間発展をできないが、一方各原子は空洞に入る前にはその固有のパラメータに依る自由発展をし、その後の状態で空洞輻射と相互作用する。これにより原子のパラメータに依る時間発展が空洞輻射の時間発展を支配する事になる。この様な、直感的描像が可能であると思われる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

Hiroshi Tamura and Valentin A. Zagrebnov, Dynamics of an Open System for Repeated Harmonic Perturbation, Journal of Statistical Physics, 査読有, No.4, Vol. 163, 2016, pp. 844-867

DOI: 10.1007/s10955-016-1500-5

Hiroshi Tamura and Valentin A. Zagrebnov, Dynamical semigroup for unbounded repeated perturbation of an open system, Journal of Mathematical Physics, 査読有, No.2, Vol. 57, 2016, 023519

DOI: 10.1063/1.4941940

Hiroshi Tamura and Valentin A. Zagrebnov, Exactly soluble quantum model for repeated harmonic perturbation, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, 査読有, Vol. 2015, October 2015, P10005

DOI:10.1088/1742-5468/2015/10/P10005

[学会発表](計 1 件)

Hiroshi Tamura, Quantum dynamical systems for repeatedly interacting harmonic oscillators, International Congress of Mathematicians 2014 年 8 月 16 日 Seoul (Korea)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田村 博志 (TAMURA, Hiroshi)

金沢大学・理工研究域機械工学系・教授

研究者番号: 80188440

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(4) 協力研究者

Valentin A. Zagrebnov (Zagrebnov,

Valentin A.)

Institut de Mathematiques de Marseille