様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ５ 月 １４ 日現在

機関番号： １３９０１
研究種目： 基盤研究(C)
研究期間： 2012～2014
課題番号： ２４５４０１６９

研究課題名（和文）障害物の運動効果による非圧縮粘性流の減衰構造の数学解析

研究課題名（英文）Mathematical analysis of decay structure of a viscous incompressible fluid arising from motions of obstacles

研究代表者
菱田　俊明（Hishida, Toshiaki）

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：６０２５７２４３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　4,000,000円

研究成果の概要（和文）：２次元あるいは３次元空間に拡がる非圧縮粘性流体の中で障害物が運動するとき、その周りの流れの構造におよぼす物体の運動効果を数学的に解明した。特に２次元平面内を物体が並進するときのOseen半群の時間減衰評価、物体が回転するときの線型化方程式の定常解の空間無限遠での漸近展開を導いた。また、３次元空間でself-propelled条件をみたす物体と流体の相互作用の問題を考察し、物体の並進速度と回転角速度を小さく与えるとき、それを達成するように境界上で制御可能であることを示した。ほかに、２次元aperture領域と３次元全空間で定常流および時間依存流があるクラスで小さいときの安定性を示した。

研究成果の概要（英文）：Suppose that a rigid obstacle is moving in a viscous incompressible fluid, where the space dimension is either 2 or 3. Then we have analyzed how the motion of the rigid body affects the spatial/temporal decay structure of the fluid. In particular, the large time behavior of the Oseen semigroup for translating body case and asymptotic expansion at space infinity of steady linearized flow for rotating body case are provided. Furthermore, for fluid-structure interaction problem in 3D, we have shown the boundary controllability of the self-propelled motion of a rigid body, whose translation and rotation are prescribed but not very large. Besides the results mentioned above, the stability of small time-dependent flow as well as steady flow has been proved in a 2D aperture domain and in 3D whole space.

研究分野： 函数方程式論

キーワード： 非圧縮粘性流　減衰構造　Navier-Stokes方程式　Stokes流　Oseen流　外部領域　漸近展開　基本解

１．研究開始当初の背景

障害物の周りの流れは流体力学の基本的な問題である。流体の運動は外部領域における Navier-Stokes 方程式の境界値問題として定式化されるが、物体が運動する場合はとりわけ面白い。剛体の運動は回転と並進に分解される。特に並進のみする問題は 1960 年代前半に Finn によって精力的に研究され、並進する物体の航跡の内外での流れの異方性を数学的に捉えた点が見事であった。一方、物体が回転する場合は、1990 年代になってようやく Borchers, および本研究の研究代表者により開始され、今世紀に入って Galdi のグループ、そして研究代表者、Farwig および柴田良弘氏らによって、回転が引き起こす双曲性の困難を克服する解析、そして一方で回転による振動効果を捉える解析が構築され、空間３次元の場合には、定常流の存在、安定性、および空間無限遠での漸近形が明らかにされた。しかし、空間２次元の場合、これらはいずれも未解決である。また、物体の運動と流体の運動の相互作用の問題は、物体の運動も未知であるので、その周りの流体のしめる外部領域が未知であり、その意味で自由境界問題となって、空間３次元であっても知見は十分でない。

２．研究の目的

２次元あるいは３次元空間にひろがる非圧縮粘性流体の中に剛体の障害物があるとする。本研究の目的は、障害物が運動する場合にその周りでの流れの構造から障害物の運動効果をできるだけ明示的に取り出すことにより、物体の運動と流体の運動の関係を数学的に解明して、関連する流体力学の諸問題の数学的基礎付けを与えることである。特に:

(1) 定常流の無限遠での漸近形と空間減衰構造、非定常流の時間減衰構造
(2) ２次元平面でストークスの逆理が物体の回転により解消される機構
(3) 物体の運動と流体の運動の相互作用、物体の運動の境界上での制御

３．研究の方法

本研究の体制は、研究代表者ひとりにより行われる。ただし、研究内容の一部分には、適宜、次の４節の（３）（４）のとおり、海外共同研究者が研究協力者として加わる。また、京都大学数理解析研究所での研究集会の開催により、若手研究者の参入も図る。

空間減衰構造の研究においては、２次元ストークスの逆理の解消も含めて、基本解の詳細な漸近展開が本質的なステップである。時間減衰構造の研究においては、resolvent 問題のスペクトル解析、Lorentz 空間での発展作用素の評価、Fourier 分解法等を用いる。物体の運動と流体の運動の相互作用の解析においては、共役線型問題を用いて構成した６次元の制御空間が重要な役割を果たす。この空間の次元は剛体の運動の自由度であることに注意する。

当科学研究費補助金の使用の観点では、研究計画を遂行するために最も肝要なことは、当分野の優れた研究者との活発な交流である。Navier-Stokes 方程式に従事する優れた研究者が所属する大学へ研究出張して有益な討論をし、また国内外の学会、研究集会、国際会議において研究成果の発表を行う。当分野をリードする世界中の研究者と討論することによって、本研究の格段の進展が見込まれる。

４．研究成果

(1) 本研究のように論点が解の漸近挙動であるときは、時空いずれの変数に関する漸近挙動であっても、空間３次元より２次元のほうが格段に難しいことはよく知られている。このことは偏微分方程式に対して広く一般的に言えることであり、解の正則性が論点であるときに高次元のほうが難しいのと対照的である。この(1)では時間変数についての挙動が主題であり、次に述べる(2)の主題は空間変数についてのそれである。いま、非圧縮粘性流体でみたされる２次元平面の中を剛体の障害物が一定な速度で並進運動しているとする。このとき、Finn-Smith の研究により、航跡を伴う異方的な減衰率をもつ定常解の存在が小さい並進速度に対して知られているが、その安定性/不安定性は今なお未解決問題である。困難は２点あり、ひとつは定常解の減衰率が航跡内部で遅いこと、いまひとつは線型化方程式である Oseen 方程式の初期値境界値問題の長時間挙動である。本研究では、後者の問題に取り組み、解を与える Oseen 半群の局所エネルギー減衰評価と Lp-Lq 型の減衰評価を得た。実際、空間３次元の問題に対するこのような評価はすでに得られていたが(Kobayashi-Shibata)、空間２次元の場合は残されていた。３次元にない２次元特有の困難は、ラプラス変換を通して対応する resolvent 問題の解の resolvent パラメータに関する対数特異性である。本研究では、まず全平面での Oseen resolvent の基本解を特殊関数によって表示した。この表示自体も新しいものである。次に、その基本解の漸近挙動を詳細に調べた上で、外部領域において resolvent のパラメトリクスを構成し、その漸近挙動を通して上記の減衰評価を示した。しかし、評価の定数がストークス半群に対する同様な評価の定数と連続に繋がっておらず、その点で改良の余地があり、それは今後の課題である。

(2) ２次元の外部定常問題を考える。障害物が静止しているときは大変な難問として知られ、その主たる困難はストークスの逆理によって線型化解析が機能しないことである。Compactness の方法によって非線型問題の解が少なくともひとつ存在することは Leray

によって示されているが、その解の空間無限遠での漸近挙動は今なお未解明である。ストークスの逆理は、ストークス基本解が無限遠で対数増大するために一般なストークス流の無限遠での挙動を制御できないことに起因する。物体が並進するとき、この逆理が解消されることは、そのときの線型化方程式の Oseen 基本解の減衰構造で説明できる。これは、Oseen 自身によって指摘されたことである。本研究では、まず第一に物体が回転する場合であっても、その振動効果により、ストークスの逆理が解消されることを明らかにした。このような事実は物理サイドの文献でも見あたらず、本研究による基本解の精確な導出とその減衰構造の詳細な解析によって初めて分かったことである。基本解を表現する積分が絶対収束しないため、何を示すにおいても微妙な論点を含み、種々の事柄の正当化のために centering の技法を要することは３次元と異なる特徴的なことである。第二に、外力が有界な台を持たない場合であっても、できる限り最適な減衰条件のもとで、線型流の無限遠での漸近展開を行い、その主要項が回転の様相を表す漸近形をもつこと、およびその係数は流体が物体におよぼすトルク（力のモーメント）で与えられることを示した。この結果は査読中のため以下の文献表にないが、arXiv:1503.02321v1 で公開されている。平面上の回転する物体の周りでの流れを記述する Navier-Stokes 方程式の新しい理論の構築の基礎となることが期待される。

(3) ３次元空間内の self-propelled 条件をみたす物体の運動と流体の運動の相互作用を考える。ただし、物体に固定した座標系で見て定常的な運動を考えることとする。また、self-propelled 条件は、流体が物体におよぼす力とトルクがいずれも消えていることを表している。本研究では、物体の回転角速度と重心の並進速度を小さく与えるときに、それを達成する境界上の制御関数を求める問題を考察し、物理的に意味のある２通りの制御方法が可能であることを示した。ひとつは境界上で小さい台をもつ制御関数による制御であり、実際、その台を非自明である限り任意に小さく取れる。もうひとつは、境界上の各点で tangential な制御関数による制御である。このような問題は、物体が軸対称でその軸に沿う並進のみを考えるときに Galdi によって考察されていたが、一般な剛体の運動であっても境界上で制御可能であることを示したのは、本研究が初めてである。解析の鍵は、与えられた並進速度と回転角速度に依存する共役線型問題を用いた制御空間の設定である。また、self-propelled 条件によって流れの無限遠での減衰率が良くなる機構も調べた。この成果は、Silvestre 氏(Lisbon) および Takahashi 氏(Nancy) との共同研究によるものである。なお、self-propelled 条件は６次元の条件であるから、制御関数が多く存在することは驚くべきことではない。あらゆる制御関数の内で、（典型例として）物体が流体から受ける抵抗を最小にするものを見つける最適制御問題は興味深い。本研究はそのような問題の解決へ向けての第一歩になりうるものである。

(4) ３次元全空間において、時間に依存した Navier-Stokes 流の安定性とそれに加えた擾乱のエネルギー減衰率を考える。時間に依存した流れとしては、時間周期解、初期値問題の大域解、自己相似解を念頭においている。時間周期解の特別な場合として、定常解であってもよい。これらの主流はある臨界空間で小さいとするが、それ以上の余分な条件、すなわち空間無限遠でその臨界空間で記述されるよりも速く減衰するとか、時空変数について滑らかであるというような条件は課さない。また、エネルギーの意味での安定性を考えることで、初期擾乱の小ささは不要となり、大域安定性を議論できる。同様な状況のもとで、大域安定性自体はすでに得られていた(Karch-Pilarczyk-Schonbek)。本研究では、擾乱の時間減衰率の構造を同じ初期値に対する線型化方程式の解の時間減衰率との関係の中で明らかにした。この結果の系として、特に初期擾乱の無限遠での空間減衰率が良いときの擾乱の時間減衰率を求めることができる。このような減衰構造は、主流が自明解のときには宮川鉄朗氏らによる深い研究があったが、主流が非自明な場合には研究が進んでいなかった。証明は、線型発展作用素の長時間挙動の解析と、本研究の共同研究者である Schonbek 氏(Santa Cruz) が 1980 年代に開発した Fourier 分解法を組み合わせて行われる。この成果は査読中のため以下の文献表にないが、arXiv:1412.0204v1 で公開されている。また、上記の Fourier 分解法と本質的に同等な議論をストークス半群だけで行う方法も見い出し、それによって３次元外部問題で対応する結果を得ることもできた。ただし、一般に期待できる最良減衰率は全空間の場合よりも真に遅く、このことは流体が物体におよぼす力の存在により説明される。

(5) 空間２次元であって流れのしめる領域が上下半平面とそれらを連結する通路からからなる問題を考える。このような領域は aperture 領域とよばれ、線型であっても通常の境界条件のもとでは解が一意に定まらず、通路での流量を指定することで一意解を得られることが特徴的である。外部問題と同様に、漸近挙動の問題は３次元よりも２次元のほうが難しい。久保隆徹氏との共同による本研究では、定常解や時間周期解が安定となるためのひとつの有益な判定法を与えた。その条件を関数空間を使わずに述べれば、無限遠で $1/|x|$ の減衰率をもち、かつ小さいという妥当なものである。この定理の系として、aperture 領域が特に対称であるときの

Galdi-Padula-Solonnikov による定常解は安定となることが分かる。定常問題に対する彼らの結果が一般な aperture 領域で成り立つかどうかは未解決で、今後の課題である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　5　件）

① Toshiaki Hishida, Lq-Lr estimate of the Oseen flow in plane exterior domains, J. Math. Soc. Japan, 掲載決定, 査読あり.

② Toshiaki Hishida, Decay estimates of the Oseen flow in two-dimensional exterior domains, Mathematical Fluid Dynamics and Nonlinear Wave, Gakuto International Series of Mathematical Sciences and Applications, 掲載決定, 査読あり.

③ Toshiaki Hishida, Takayuki Kubo, On the asymptotic stability for small initial disturbance of Navier-Stokes flow in a two-dimensional aperture domain, Mathematical Fluid Dynamics and Nonlinear Wave, Gakuto International Series of Mathematical Sciences and Applications, 掲載決定, 査読あり.

④ Toshiaki Hishida, Mathematical analysis of the equations for incompressible viscous fluid around a rotating obstacle, Sugaku Expositions 26 (2013), 149—179, 査読あり.

⑤ Toshiaki Hishida, Resolution of the Stokes paradox by the rotation of bodies in the plane, 京都大学数理解析研究所講究録 1782 (2012), 1—16, 査読なし.

〔学会発表〕（計　18　件）

① 菱田俊明, Asymptotic structure of steady Stokes flow around a rotating obstacle in two dimensions, 日本数学会春季年会, 2015 年 3 月 23 日, 明治大学.

② 菱田俊明, Asymptotic structure of steady viscous incompressible flow around a rotating obstacle in 2D, International Conference on Mathematical Fluid Dynamics --Present and Future--, 2014 年 11 月 13 日, 早稲田大学.

③ 菱田俊明, Stabiliy of time-dependent Navier-Stokes flow and algebraic energy decay, Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, 2014 年 10 月 27 日, BadBoll (Germany).

④ 菱田俊明, Stability of time-dependent Navier-Stokes flow and algebraic energy decay, 日本数学会秋季総合分科会, 2014 年 9 月 27 日, 広島大学.

⑤ 菱田俊明, Stability of time-dependent Navier-Stokes flow and algebraic energy decay, JSPS-DFG 日独大学院共同プログラム Kickoff Meeting, 2014 年 6 月 18 日, 早稲田大学.

⑥ 菱田俊明, Stability of nonstationary Navier-Stokes flow and algebraic energy decay, Days on Diffraction, 2014 年 5 月 29 日, St.Petersburg (Russia).

⑦ 菱田俊明, Stability of time-dependent Navier-Stokes flow and algebraic energy decay, Vorticity, Rotation and Symmetry (III): Approaching Limiting Cases of Fluid Flow, 2014 年 5 月 9 日, CIRM, Luminy (France).

⑧ 菱田俊明, Decay estimates of the Oseen semigroup in two-dimensional exterior domains, Geophysical Fluid Dynamics, 2013 年 2 月 21 日, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach gGmbH, Oberwolfach-Walke (Germany).

⑨ 菱田俊明, Decay estimates of the Oseen flow in two-dimensional exterior domains, 微分方程式の総合的研究, 2012 年 12 月 16 日, 京都大学.

⑩ 菱田俊明, Asymptotic behavior of viscous incompressible flows in plane exterior domains, Mathematical Theory of Turbulence via Harmonic Analysis and Computational Fluid Dynamics, 2012 年 12 月 8 日, 名古屋大学.

⑪ 菱田俊明, Decay estimates of the Oseen flow in the plane, Conference on Parabolic and Navier-Stokes Equations, 2012 年 9 月 3 日, Banach Center, Bedlewo (Poland).

⑫ 菱田俊明, Decay estimates of the Oseen flow in two-dimensional exterior domains, 第 37 回偏微分方程式論札幌シンポジウム, 2012 年 8 月 25 日, 北海道大学.

⑬ 菱田俊明, Decay estimates of the Oseen flow in the plane, The 9th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2012 年 7 月 5 日, Orlando, Florida (USA).

６．研究組織

(1)研究代表者

菱田　俊明（HISHIDA, Toshiaki）
名古屋大学　大学院多元数理科学研究科
教授
研究者番号：60257243

(2)研究分担者　なし

(3)連携研究者　なし