

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 27 年 4 月 9 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540170

研究課題名(和文) Dirichlet形式が定める対称拡散過程の局所構造と付随するノイズの研究

研究課題名(英文) Study of local structures and noises of symmetric diffusion processes associated with Dirichlet forms

研究代表者

日野 正訓 (Hino, Masanori)

大阪大学・基礎工学研究科・教授

研究者番号：40303888

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円

研究成果の概要(和文)：フラクタルや無限次元空間など、複雑な構造を持つ空間におけるディリクレ形式が定める拡散過程の局所構造とノイズの研究を行った。特に、ある種のフラクタルにおいて、ディリクレ形式から自然に定まる2種類の距離についての関係を導出し、ウィナー空間上の局所所有界変動関数と確率解析への応用に関する一般論と非自明な具体例についての研究を行い、論文を執筆し学術誌に掲載された。更に、ここ数年間に得られた研究成果を纏めた論説を執筆した。

研究成果の概要(英文)：I studied local structures and noises of diffusion processes associated with Dirichlet forms on spaces with anomalous structures such as fractals and infinite dimensional spaces. In particular, I proved some relations between two distances on a class of fractals derived from natural Dirichlet forms, and studied a general theory and nontrivial examples of functions of locally bounded variations on the Wiener space together with their applications to stochastic analysis. The papers on these studies have been published in academic journals. Moreover, I wrote a survey paper based on my studies of the past several years.

研究分野：確率論

キーワード：確率解析 Dirichlet形式 対称拡散過程 局所構造 ノイズ フラクタル ウィナー空間 エネルギー測度

### 1. 研究開始当初の背景

確率解析の研究において、与えられた適切なデータをもとに連続時間パラメータの確率過程を構成し、その性質を調べることは最も基本的で非自明な問題の1つである。Euclid空間の領域やRiemann多様体などの可微分構造を持つ空間においては、1つの強力な手法として確率微分方程式の理論があり、既に深い理論と広汎な応用が展開されている。一方、1980年代頃から様々な物理モデルの研究等を通じて、多様体上の道の空間やフラクタル集合など、局所構造が古典的なものと本質的に異なる空間における確率解析の研究が注目され始めた。この場合、確率微分方程式の理論は有効でなかったり適用不可能であったりするが、別の手法であるDirichlet形式の理論の有用性が徐々に認識されるようになってきた。この2つは適用範囲が異なり、それぞれ相補う理論といえる。Dirichlet形式の理論は、関数空間とそこに属する関数の「エネルギー」に相当する解析的な情報さえ適切に定まれば、対応する対称Markov過程が一般論によって構成され、特段の空間構造を必要としない柔軟さが大きな利点であり、この約30年間で理論・応用の両面で大きな進展を遂げた。しかしながら、Dirichlet形式とMarkov過程との対応関係がMarkov半群を経由した間接的なものであることに起因する研究上の障害もいまだ多い。確率微分方程式と事情が大きく異なる一例を挙げると、フラクタル集合上の対称Markov過程のサンプルパスについて、微視的挙動の情報はDirichlet形式の表示式からは全く明らかでない。このような局所構造における情報を得ることは、Markov過程から定まるノイズの解析に直接関わる基本的かつ重要な問題であるが、有効な解析手段がほとんど見つかっていないため、非古典的な空間においてはこれまで極く限られた結果しか得られていなかった。

### 2. 研究の目的

本研究は、一般の状態空間上での確率解析に有用なDirichlet形式の理論において、拡散過程の微視的挙動と付随するノイズの研究を行う。より具体的には、ノイズと解析的な情報との対応を踏まえることで、Dirichlet形式から決まる解析的な性質を調べることによりノイズの構造を明らかにしたり、その性質から拡散過程の微視的挙動に関して新たな知見を得ることを目的とする。このような一般論が未だ確立されていないことが、微視的挙動を直接記述する確率微分方程式の理論と比較したとき、Dirichlet形式の理論の弱点となっていた。本研究では、申請者の近年の研究で得られた新しい知見をもとに現状を開拓する理論展開を行い、その応用としてフラクタルや経路空間など、物理モデル等に自然に現れる複雑な構造を持つ空間に

おいて、従来困難だった、より深いレベルでの確率解析を目指す。

### 3. 研究の方法

Dirichlet形式の一般理論は強力であるが、本研究テーマにおいては考察する空間の性質に依存する議論が必要となる。フラクタル上の解析においては有限分岐的な性質をみたく場合、グラフの極限としての解析が可能なが多いため、考察する問題によってはそのような性質を仮定して議論を行うことを検討する。無限次元空間上の解析に関しては、具体的なウィナー空間が扱いやすいため、まずはこの場合に議論ができるかどうかを最初の指針とする。従前から知られている技法を応用して新しい結果を得るという方向性の研究では必ずしもないため、考察する課題ごとに解析方法を検討する必要があるが、既存研究については精査して利用できるアイデアを取り入れるようにする。

### 4. 研究成果

ウィナー空間上の有界変動関数の理論展開に関する研究を行った。具体的には、Dirichlet形式の理論を参考にして局所有界変動の概念を定式化し、ウィナー空間上の局所有界変動関数がヒルベルト空間値測度を超関数微分として持つこと、およびその関数に対応するDirichlet形式が考えられるとき付随する拡散過程がSkorokhod表現を持つことを示した。これは従前研究されていた有界変動関数の場合と同様な性質である。更に古典ウィナー空間において典型的な指示関数が局所有界変動であるかという問題を考察し、以前研究した有界変動となるための十分条件より真に弱い十分条件を与えた。これは無限次元空間における確率解析の研究において局所有界変動という概念が有効であることを表わすとともに、無限次元空間におけるSkorokhod表現を通じた拡散過程のノイズの研究に向けた有用な結果であると考えられる。従前、無限次元空間における反射壁拡散過程の構成は確率偏微分方程式やランダムウォークのスケール極限等によるものが主であったが、制約条件が強いという難点があった。有界変動関数とDirichlet形式を用いた手法はこれらに代わる有力なアプローチとなることが今後期待されるものである。以上の研究成果については論文を執筆し、掲載済である。

過去数年間の研究成果、特にDirichlet形式の指数に関する日本語の論説を依頼されたため執筆を行い、掲載された。この論説により、本テーマの現状と今後研究すべき課題を明らかにした。

Riemann多様体などの滑らかな空間におい

ては、標準的な Dirichlet 形式から定まる内在的距離は幾何学的な測地距離に一致し、これは熱核の評価などに利用される基本的な事実である。底空間がフラクタル集合の場合は、多くの場合内在的距離が恒等的に 0 となってしまうそのままでは意義がないが、参照測度を適切に設定することにより、非自明な内在的距離を考えることができる。これが幾何学的な表示を持つかどうかという問題は基本的であるが、梶野直孝氏による 2 次元シェルピンスキーガスケットのケースの研究が従来唯一のものであった。今回、離散グラフの極限で表せるような空間において、弱い仮定の下、内在的距離が測地距離以下であることを示した。また、調和構造が非退化な一般化 2 次元シェルピンスキーについては、両者が等しいことを証明した。証明方法は従来のもとは異なる。これにより付随する拡散過程の短時間挙動について新たな知見を得た。以上の結果については論文を執筆し、学術誌に掲載された。

強局所 Dirichlet 形式の (各点) 指数が空間の仮想的な接空間の次元を表し、底空間に可測的な Riemann 構造が導入されることを示した。また、確率解析への応用を論じた。この研究は本研究課題の期間以前に論文を投稿し、期間中に修正を行い学術誌に掲載された。

フラクタル上の自然な Dirichlet 形式に関するマルチンゲール次元の決定問題に取り組んだ。フラクタルに限らない一般的な空間においてマルチンゲール次元の評価を与える技法を新たに開発した。その応用として、p.c.f. フラクタルと呼ばれる有限分岐的自己相似集合において、その上の自然な拡散過程に対するマルチンゲール次元が 1 であること、および無限分岐的フラクタルの代表例である Sierpinski carpet に対して、ブラウン運動に対するマルチンゲール次元がスペクトル次元以下であることを証明した。この結果は従前の結果の大幅な拡張であり、より一般の空間においても「マルチンゲール次元スペクトル次元」という従前知られていなかった不等式が成立することを示唆するものである。この研究は本研究課題の期間以前に論文を投稿し、期間中に修正を行い学術誌に掲載された。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

Masanori Hino, Functions of locally bounded variation on Wiener spaces, Festschrift Masatoshi Fukushima: In Honor of Masatoshi Fukushima's Sanju, 219-236,

Interdisciplinary Mathematical Sciences, vol. 17, World Scientific, Singapore, 2015. 査読有

日野正訓, Dirichlet 形式における指数, 数学, vol. 66 (2014), 61-77. 査読有

Masanori Hino, Geodesic distances and intrinsic distances on some fractal sets, Publ. Res. Inst. Math. Sci., vol. 50 (2014), 181-205. 査読有

Masanori Hino, Measurable Riemannian structures associated with strong local Dirichlet forms, Math. Nachr., vol. 286 (2013), 1466-1478. 査読有

Masanori Hino, Upper estimate of martingale dimension for self-similar fractals, Probab. Theory Related Fields, vol. 156 (2013), 739-793. 査読有

[学会発表](計 7 件)

Masanori Hino, Functions of locally bounded variation on Wiener spaces, Dirichlet Form Theory and its Applications, 2014/10/22, Oberwolfach (ドイツ)

日野正訓, 無限次元空間に関する 2,3 の話題, RIMS 研究集会 確率解析, 2014/03/18, 京都大学数理解析研究所 (京都府・京都市)

Masanori Hino, Measurable Riemannian structures associated with Dirichlet forms, The Asian Mathematical Conference 2013, 2013/07/02, Busan (韓国)

Masanori Hino, Geodesic distances and intrinsic distances on some fractal sets, International Conference on Advances on Fractals and Related Topics, 2012/12/11, 香港 (中国)

Masanori Hino, Geodesic distances and intrinsic distances on some fractal sets, Stochastic Analysis and Applications, 2012/09/28, 岡山大学 (岡山県・岡山市)

Masanori Hino, Geodesic distances and intrinsic distances on some fractal sets, 6th International Conference on Stochastic Analysis and Its Applications, 2012/09/10, Będlewo (ポーランド)

Masanori Hino, Geodesic distances and intrinsic distances on some fractal sets, RIMS workshop: Potential Theory and its Related Fields, 2012/09/04, 京都大学 (京都府・京都市)

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕  
ホームページ等  
<http://elis.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/~hino/index.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

日野正訓 (HINO, Masanori)  
大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授  
研究者番号：40303888

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし