

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 2 日現在

機関番号：14602

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540173

研究課題名(和文) 分解定理に基づく流体及び電磁気現象の統一的分析方法の展開

研究課題名(英文) The development of the unified analytical method to hydrodynamical and electromagnetic phenomena based on decomposition theorems

研究代表者

柳沢 卓 (Yanagisawa, Taku)

奈良女子大学・自然科学系・教授

研究者番号：30192389

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：磁気流体力学方程式の定常的境界値問題に対して、我々の提出した分解定理に基づく解析手法を適用しその実効性と問題点を明らかにしました。具体的には、非斉次境界条件下での弱解の存在定理を示しましたが、その中でNavier-Stokes方程式に対して用いてきた分解定理に基づく解析手法の問題点が幾つか明らかになり、今後の研究課題が明確になりました。更に、定常解の安定性解析にも分解定理に基づく解析手法が有効であることを示唆する結果を得ることもできました。

研究成果の概要(英文)：Applying our analytical method based on decomposition theorems to the stationary boundary value problems of MHD equations, we investigate the effectiveness or the subjects to be examined of our analytical method. In fact, we succeed in proving the existence of the weak solutions with inhomogeneous boundary data. In the process of the proof, we clarify some points which reflect the peculiar mathematical structures of MHD equations. We can also obtain some results suggesting that our analytical method based on decomposition theorems might be effective even in the stability analysis.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：分解定理 境界値問題 流体力学 電磁気学 MHD方程式

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は小園英雄氏との共同研究において、スカラーおよびベクトルポテンシャルに関わる変分不等式を導出することにより有界領域上の L^p -ベクトル場の Hodge 分解定理を提出しました (H.Kozono and T.Yanagisawa, Indiana Univ. Math. J., Vol. 58, 1853-1920, 2009). 更に、その応用として

- (1) 非斉次境界条件下における定常 Navier-Stokes 方程式の弱解の存在、
 - (2) 大域的な Div-Curl lemma あるいは Compensated compactness theorem、
- に関する研究を進めてきました。

このような分解定理に基づいた考察を、電磁流体力学を含むより広範な方程式に対して推し進めることにより、定常解のなす空間の構造と領域の位相的・幾何学的性質との関係を解明する統一的解析手法を展開できないだろうか、という発想が本研究の動機となりました。

2. 研究の目的

本研究課題の具体的目標は、以下の4項目でした。

- (1) 流体および電磁気現象に現れる具体的定常境界値問題に対して、分解定理を用いた解析手法を適用しその実効性と問題点を明らかにします。
- (2) 領域に対称性や位相に関わる仮定を課した下での、定常 Navier-Stokes 方程式に対する非斉次境界値問題の可解性を、分解定理を用いることにより検討します。更に、解の分岐等に関する考察を行います。
- (3) Navier-Stokes 流の漸近解を、分解定理を取り入れることにより非粘性極限問題に適用可能な形で構成します。
- (4) 以上の結果を基に、流体および電磁気現象に現れる定常境界値問題や特異摂動問題に対する、統一的解析手法の提示を目指します。

3. 研究の方法

平成 24 年度は、流体および電磁気現象に現れる具体的な問題に分解定理を用いた解析手法を適用し、その実効性と問題点を見極め同時に既存の研究との対比を行う予定でした。平成 25 年度以降は、具体的問題に対する考察により得られた知見を基に、その中に潜む数学的構造を抽出し新たな統一的解析手法の提示を目指す予定でした。

具体的には、以下の研究の遂行を目指しました。

- (1) 流体および電磁気現象に現れる重要な例として磁気流体力学方程式を取り上げ、その定常的非斉次境界値問題の存在定理に関する考察を通して、分解定理を用いた解析手法の実効性と問題点の検討を行います。

- (2) 領域の対称性や位相的性質と(1)で考察した定常問題の可解性等との関係を、分解定理を用いることにより明らかにします。
- (3) (1)に現れる種々の物理的パラメータの極限をとったときに現れる特異摂動極限問題の漸近解を構成します。
- (4) 以上の具体的問題に対する考察を通して得られた知見を基に、新たな統一的解析手法の提示を目指します。

4. 研究成果

- (1) 磁気流体力学方程式に対する定常的境界値問題については、その非斉次境界条件の設定の仕方自体が明確になっていないことが分かったので、境界値問題としての問題設定の検討から行いました。このことにより、オームの法則と組み合わせることにより磁気流体力学方程式に(見かけ上の)電場を取り入れ、非斉次境界条件を電場の接線成分と法線成分および速度場に課す形の物理的にも自然な問題設定を提出することができました。また、接線方向トレースからなる空間の特徴付けを用いることにより、電場の接線成分に対する境界データの函数解析的取扱いが可能になることを明らかにしました。

- (2) 上記(1)で与えた問題設定の下で、弱解の適切な定義を与えた後、弱解に関連する弱形式の coerciveness を示すことにより存在定理を得ることができました。この際、通常の分解定理を用いて磁場のディリクレ積分を評価すると、領域に対して不自然な制限を課す必要が出てくることが明らかになりました。しかし、この問題点は、分解定理自体を改良して弱解の定義を修正することにより解消できることが分かりました。従来の分解定理を改良するという観点は、磁気流体力学方程式の考察を通して、初めて出てきたものです。

- (3) 上記(2)における、弱解に付随する弱形式の coerciveness の導出においては、Navier-Stokes 方程式に対して有効であった Hardy 不等式による方法が適用できないことが明らかになりました。そこで、cut-off 関数と既存の幾つかの結果を組み合わせる方法により、Hardy 不等式を経由しない形で coerciveness を示しましたが、速度場データの法線成分を境界上で各点的に0にするという強い制限を課す必要が出てきました。この制限が流体现象に加えて電磁気現象を考慮するとき自然に現れるものなのかどうかは不明であり、今後の研究課題です。

- (4) 「Maxwell タイプの Leray の不等式」を提出することにより、Navier-Stokes 方程式と磁気流体力学方程式の数学的構造の違いを明確にしました。また、

Maxwell タイプの Leray の不等式の成立 (あるいは不成立) と領域の幾何学的性質との関係を解明するという新たな研究課題を得ることができました。

- (5) 上記(2)で得た定常解の安定性解析を行い、次の結果を得ました。「速度場および電磁場に対する全ての境界データが十分小さい時の定常解は任意の初期擾乱に対して(エネルギーノルムに関して)指数安定である。」
- (6) 上記(5)で得た安定な定常解は、境界データを全て小さくした場合のものなので、解それ自身も「小さい」ものとなっています。そこで、分解定理を用いることにより「大きな安定定常解」を見出すことはできないか、考察を進めました。その結果、領域の接線的調和ベクトル場の成す空間がトリビアルでない時(例えば領域がトーラス内部からなる時)は、「大きな安定定常解」を構成できることを示しました。証明は、最近発表された N.Kanbayashi, H.Kozono and T.Okabe (J. Math. Anal. Appl., Vol.409, (2014), 378-392) と類似の議論を用いしましたが、領域の位相的特性と「大きな安定定常解」の存在とを結びつけた点で、興味深いものと考えます。
- (7) 以上の(1)~(6)の結果の一部は、下記5にある〔雑誌論文〕、および〔学会発表〕で発表しています。本論文は現在執筆中です。
- (8) 研究の目的欄の(2)に書いた事項に関しては、2013年3月に奈良で開催された国際研究集会「International Conference on the Mathematical Fluid Dynamics」において、Pileckasにより「2次元領域および3次元軸対称領域においては、境界フラックスに何ら付加条件を加えることなく一般化された流量条件の下で弱解が存在する」という決定的結果(論文は、M.V.Korobkov, K.Pileckas and R. Russo, Ann. of Math., Vol.181, (2015), 769-807)が報告された為、予定を変更し、まずは彼らの結果の理解に努めました。彼らの結果のサーベイを、下記5にある〔学会発表〕において行いました。
- (9) 研究目的欄の(3)に書いた特異摂動極限問題については、予備的考察しかできませんでした。
- (10) 磁気流体力学方程式の考察を通して、Navier-Stokes 方程式に対して我々が用いてきた分解定理による解析手法の問題点の幾つかが明らかになってきました。同時に、当初予想していなかった安定性解析における分解定理の有効性も垣間見えてきました。目標であった「分解定理を用いた統一的解析手法の提示」には至りませんでした。今後の研究の方向性は明確になってきたと考えてい

ます。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計4件)

柳沢卓, 定常 MHD 方程式に対する境界値問題, 数理解析研究所講究録, 査読無し, Vol.1905, (2014), 40-52

H. Kozono and T. Yanagisawa, L^r Helmholtz decomposition and its application to the Navier-Stokes equations, Lectures on Analysis of Nonlinear Partial Differential Equations: Part 3, Morning-side Lectures in Mathematics, 査読有, International Press, (2013), 237-290

H. Kozono and T. Yanagisawa, Global compact theorem for general differential operators of first order, Arch. Rational Mech. Anal., 査読有, Vol.207, (2013), 879-905

H. Kozono and T. Yanagisawa, Generalized Lax-Milgram theorem in Banach spaces and its application to the elliptic system of boundary value problem, Manuscripta Math., 査読有, Vol.141, (2013), 637-662

〔学会発表〕(計9件)

柳沢卓, The Solvability and stability of boundary value problems for stationary MHD equations, 第4回弘前非線形方程式研究会(招待講演), 2014年12月6日, 弘前大学(青森県・弘前市)
Taku Yanagisawa, The boundary value problem for the MHD equations, Classical Problems and New Trends in Mathematical Fluid Dynamics(招待講演), 2014年10月2日, Ferrara(Italy)

Taku Yanagisawa, The solvability and stability of boundary value problems for stationary MHD equations, ICM 2014 Satellite Conference, Mathematical Theory of Gases and Fluids and Related Applications(招待講演), 2014年8月12日, Seoul(Italy)

柳沢卓, 定常 MHD 方程式に対する非斉次境界値問題について, 大阪市大・大阪府大合同第19回南大阪応用数学セミナー, 2014年6月28日, 大阪府立大学(大阪府・堺市)

Taku Yanagisawa, The solvability of stationary solutions to the MHD equations under the nonhomogeneous boundary conditions, Fluid Dynamics and Electromagnetism: Theory and Numerical Approximation(招待講演), 2014年6月5日, Levico Terme (Italy)

Taku Yanagisawa, Solvability of boundary value problems of the stationary MHD systems, Recent Advances in PDEs and Applications (招待講演), 2014年2月18日, Levico Terme (Italy)

Taku Yanagisawa, Boundary value problems for the stationary MHD equations, Mathematical Analysis of Viscous Incompressible Fluid, RIMS Symposium (招待講演), 2013年11月26日, 京都大学数理解析研究所, (京都府・京都市)

Taku Yanagisawa, On the solvability of boundary value problems for the stationary MHD equations with inhomogeneous boundary conditions, Mathematical Analysis of Nonlinear Partial Differential Equations (招待講演), 2013年11月15日, 九州大学, (福岡県, 福岡市)

Taku Yanagisawa, On the solvability of Navier-Stokes equations with nonhomogeneous boundary condition, Nonlinear Wave Equation and Fluid Mechanics (招待講演), 2013年8月24日, 室蘭工業大学, (室蘭市, 北海道)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.nara-wu.ac.jp/math/personal/yanagisawa/yanagisawa.htm>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

柳沢 卓 (YANAGISAWA, Taku)

奈良女子大学・自然科学系・教授

研究者番号: 30192389

(2) 研究分担者

無し

(3) 連携研究者

無し