

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 21 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540174

研究課題名(和文)楕円型偏微分方程式に対するポテンシャル論的研究

研究課題名(英文)Potential theoretic study for elliptic partial differential equations

研究代表者

下村 哲 (SHIMOMURA, TETSU)

広島大学・教育学研究科(研究院)・教授

研究者番号：50294476

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：変動指数をもつルベーグ空間やソボレフ空間は非線形偏微分方程式を考察するのに有用な関数空間である。これらの関数空間は、弾性学や電気流動学の研究に関連して重要であることがわかってきた。本研究では、変動指数をもつ Musielak-Orlicz-Morrey 空間における Hardy-Littlewood の極大作用素の有界性を導き、その応用として、変動指数をもつ Musielak-Orlicz-Morrey 空間に属する関数のリースポテンシャルのソボレフの不等式や Trudinger 指数積分不等式について新しい知見を得た。

研究成果の概要(英文)：Variable exponent Lebesgue spaces and Sobolev spaces were introduced to discuss nonlinear partial differential equations with non-standard growth condition. These spaces have attracted more and more attention in connection with the study of elasticity and electrorheological fluids. In this research, we studied the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator on Musielak-Orlicz-Morrey spaces with variable exponents. As an application of the boundedness of the maximal operator, we establish a generalization of Sobolev's inequality and Trudinger's exponential inequality for Riesz potentials of functions in Musielak-Orlicz-Morrey spaces with variable exponents.

研究分野：実解析

キーワード：ソボレフ関数 楕円型偏微分方程式

1. 研究開始当初の背景

ソボレフ空間は古典的にはユークリッド空間において定義されてきた。しかし、一般の距離空間上でのソボレフ関数の研究が、微分幾何学やグラフ上の解析学などへの応用を念頭に、Martio、Koskela、Heinonen、Kilpeläinenらフィンランド学派を中心に、学際的かつ国際的にも大きな進歩をしつつある。

また、21世紀に入って、電気流動学や弾性学などへの応用を念頭において、変動指数をもつ偏微分方程式の考察とそのための関数空間の理論が重要であることがわかってきた。変動指数をもつ Orlicz 空間 $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$ や Morrey 空間を一般化した Musielak-Orlicz-Morrey 空間の研究は世界的にみてもほとんどされておらず、今後の進展が期待されている。

2. 研究の目的

(1) 電気流動学や弾性学などへの応用のために、ソボレフ空間だけでなく、変動指数をもつ Musielak-Orlicz 空間、Musiellak-Orlicz-Morrey 空間、Campanato 空間などの関数空間においてソボレフ型定理を発展させ、ソボレフ関数の正則性を調べる。

(2) 偏微分方程式論、多様体上の微分幾何学やグラフ上の解析学などへの応用のために、距離空間上においてソボレフ型定理を発展させ、ソボレフ関数の正則性を調べる。

(3) 自己相似集合に代表されるフラクタルを境界にもつ領域におけるソボレフ関数の境界挙動を調べる。

(4) 非線形楕円型偏微分方程式の解の性質、ペロン法による非線形ディリクレ問題を調べる。

3. 研究の方法

平成24年度は、研究代表者は、研究分担者が研究打ち合わせを行えるよう日程の調整をした。主として、変動指数をもつ Musielak-Orlicz-Morrey 空間に関するソボレフ型定理に関する研究などを行った。変動指数をもつ Musielak-Orlicz 空間と Orlicz-Morrey 空間の解析および距離空間上

の関数空間に関する研究(水田)を分担して行った。

平成25年度以降は、研究代表者が、研究分担者が研究打ち合わせを行えるよう日程の調整をした。主として、距離空間上の変動指数をもつ Musielak-Orlicz-Morrey 空間におけるソボレフ型定理に関する研究などを行った。変動指数をもつ Musielak-Orlicz-Morrey 空間におけるソボレフ型定理に関する研究(水田)を分担して行った。

4. 研究成果

(1) 変動指数をもつ Musielak-Orlicz 空間において、重み付きのソボレフの不等式、Gagliardo-Nirenberg 不等式、Trudinger の指数積分不等式、平均の連続性、Young 型の不等式に関する成果を得た。Musiellak-Orlicz-Sobolev 空間において、Hardy の不等式に関する成果も得た。また、変動指数をもつルベグ空間に対するリトルウッド-ペーリー理論に関する成果も得た。これらの研究から、Musiellak-Orlicz 空間の解析の重要性を再認識できた。

(2) 変動指数をもつ Musielak-Orlicz-Morrey 空間において、極大作用素の有界性に関する結果を得た。Hedberg の方法を用いることにより、変動指数をもつ Musielak-Orlicz-Morrey 空間に属する関数のリースポテンシャルに対するソボレフの不等式を得た。さらに、Trudinger の指数積分不等式に関する結果も得た。これらの研究から、ソボレフ空間だけでなく、Musiellak-Orlicz-Morrey 空間の解析の重要性を再認識できた。

(3) 1 に近づく変動指数をもつ一般化された Morrey 空間や $p=1$ で \mathbb{R}^n の場合の Morrey 空間において、リースポテンシャルに対するソボレフの不等式に関する成果を得た。

(4) 距離空間上でのソボレフ型定理の発展を目指し、変動指数をもつ Musielak-Orlicz-Morrey 空間において、リースポテンシャルに対する Trudinger の指数積分不等式、連続性に関する成果を得た。

(5) 2倍条件を仮定しない non-doubling measure 空間上におけるソボレフ型定理の発展を目指し、変動指数をもつ Morrey 空間、変動指数をもつ grand Morrey 空間、変動指数をもつ Musielak-Orlicz-Morrey 空間において、リースポテンシャルに対するソボレフの不等式、Trudinger の指数積分不等式、連続性に関する成果を得た。p=1 の場合で、一般化された Morrey 空間において、リースポテンシャルに対するソボレフの埋蔵定理に関する成果を得た。これらの研究から、距離空間上での Musielak-Orlicz-Morrey 空間の解析の重要性を認識できた。

(6) Orlicz 空間や変動指数をもつ Orlicz 空間に属する単調なソボレフ関数に対する Lindelöf 定理などの境界挙動に関する結果を得た。変動指数をもつ Orlicz 空間において、リースポテンシャルに対するトレース不等式に関する成果を得た。Orlicz 空間において、リースポテンシャルに対する Trudinger の指数積分不等式に関する成果を得た。

(7) 一般化されたバナッハ空間上での Hardy 作用素に関する結果を得た。双対性についても成果を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計22件)

1. Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potentials of functions in Morrey spaces $L^{1, \lambda, 2}(\mathbb{R}^n)$, *Math. Inequal. Appl.* **17**, Number 4 (2014), 1399-1414. 査読有
doi.org/10.7153/mia-17-103

2. Sawano and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potentials of functions in Musielak-Orlicz-Morrey spaces over non-doubling measure spaces, *Integral Transforms and Special Functions* **25** (2014), 976-991. 査読有

DOI:10.1080/10652469.2014.955099

3. T. Ohno and T. Shimomura, Trudinger's inequality and continuity for Riesz potentials of functions in Musielak-Orlicz-Morrey spaces on metric measure spaces, *Nonlinear Anal.* **106** (2014), 1-17. 査読有

doi.org/10.1016/j.na.2014.04.008

4. F. - Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Hardy's inequality in Musielak-Orlicz-Sobolev spaces, *Hiroshima Math. J.* **44** (2014), 139-155. 査読有

5. T. Ohno and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potentials of functions in grand Morrey spaces of variable exponents over non-doubling measure spaces, *Czechoslovak Math. J.* **64** (139) (2014), 209-228. 査読有

10.1007/s10587-014-0095-8

6. T. Ohno and T. Shimomura, Trudinger's inequality for Riesz potentials of functions in Musielak-Orlicz spaces, *Bull. Sci. Math.* **138** (2014), 225-235. 査読有

doi.org/10.1016/j.bulsci.2013.05.007_

7. F. Di Biase, T. Futamura and T. Shimomura, Lindelöf theorems for monotone Sobolev functions in Orlicz spaces, *Illinois J. Math.* **57** No.4 (2013), pp 1025-1033. 査読有

8. F. - Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Approximate identities and Young type inequalities in Musielak-Orlicz spaces, *Czechoslovak Math. J.* **63** (138) (2013), pp 933-948. 査読有

DOI: 10.1007/s10587-013-0063-8

9. F. - Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Mean continuity for potentials of functions in Musielak-Orlicz spaces, *RIMS Kokyūroku Bessatsu.* **B43** (2013), pp 81-100. 査読有

10. Y. Sawano and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potentials of functions in non-doubling Morrey spaces of variable exponents, *Collect. Math.* **64** (2013), pp 313-350. 査読有

DOI: 10.1007/s13348-013-0082-7

11. Y. Sawano and T. Shimomura, Sobolev embeddings for generalized Riesz potentials of functions in Morrey spaces $L^{(1, \lambda)}(G)$ over non-doubling measure spaces, *J. Function Spaces Appl. Volume 2013* (2013), April, Article ID 984259, 12 pages 査読有

12. Y. Mizuta, E. Nakai, Y. Sawano and T. Shimomura, Littlewood-Paley theory for variable exponent Lebesgue spaces and Gagliardo-Nirenberg inequality for Riesz potentials, *J. Math. Soc. Japan.* **65** (2013), pp 633-670. 査読有
doi:10.2969/jmsj/06520633_

13. Y. Mizuta, Ales Nekvinda and T. Shimomura, Hardy averaging operator on generalized Banach function spaces and duality, *Zeit. Anal. Anwend.* **32** (2013), pp 233-255. 査読有 DOI: 10.4171/ZAA/1483

14. T. Futamura and T. Shimomura, On the boundary limits of monotone Sobolev functions in variable exponent Orlicz spaces, *Acta. Math. Sinica.* **29** (2013), pp 461-470. 査読有
DOI: 10.1007/s10114-013-0575-z

15. F. - Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Trudinger's inequality and continuity of potentials on Musielak-Orlicz-Morrey spaces, *Potential Anal.* **38** (2013), 515-535. 査読有
doi 10.1007/s11118-012-9284-y

16. Y. Sawano and T. Shimomura, Sobolev's inequality for Riesz potentials of functions in generalized Morrey spaces with variable exponent attaining the value 1 over non-doubling measure spaces, *Journal of Inequalities and Applications*, (2013), 2013:12. 査読有
doi:10.1186/1029-242X-2013-12

17. F. - Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Boundedness of maximal operators and Sobolev's inequality on Musielak-Orlicz-Morrey spaces, *Bull. Sci. Math.* **137** (2013), 76-96. 査読有
doi.org/10.1016/j.bulsci.2012.03.008_

18. Y. Mizuta and T. Shimomura, Exponential integrability of Riesz potentials of Orlicz functions, *Illinois J. Math.* **56**, No.2 (2012), pp 507-520. 査読有

19. Y. Mizuta and T. Shimomura, A trace inequality of Riesz potentials in variable exponent Orlicz spaces, *Math. Nachr.* **285** (2012), No.11-12, 1466-1485. 査読有
DOI: 10.1002/mana.201000115

20. Y. Mizuta, E. Nakai, T. Ohno and T. Shimomura, Maximal functions, Riesz potentials and Sobolev embeddings on Musielak-Orlicz-Morrey spaces of variable exponent in \mathbb{R}^n , *Rev. Mat. Complut.* **25** (2012), 413-434. 査読有
DOI 10.1007/s13163-011-0074-7

21. Y. Mizuta, E. Nakai, Y. Sawano and T. Shimomura, Gagliardo-Nirenberg inequality for generalized Riesz potentials of functions in Orlicz-Musielak spaces, *Arch. Math.* **98**

(2012), 253-263. 査読有

DOI:10.1007/s00013-012-0362-6

22. Y. Mizuta and T. Shimomura, Weighted Sobolev inequality in Musielak-Orlicz space, *J. Math. Anal. Appl.* **388** (2012), 86-97. 査読有
doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.10.055

〔学会発表〕(計6件)

1. 下村 哲, Growth properties of Musielak-Orlicz integral means for Riesz potentials, 日本数学会秋季総合分科会(広島大学), 2014年9月27日.

2. 下村 哲, Weighted Morrey spaces of variable exponent and Riesz potentials, ポテンシャル論研究集会(北海道大学), 2013年8月29日.

3. T. Shimomura, Exponential integrability of Riesz potentials of Orlicz functions, Harmonic Analysis and its Applications at Tokyo 2012 (Tokyo Metropolitan University, Minami-Osawa Campus, International House), November 18, 2012. (November 16 (Fri) -- 18 (Sun), 2012)

4. Y. Mizuta, Sobolev's inequality for Riesz potentials of functions in grand Morrey spaces of variable exponent, The fourth International Symposium on BANACH and FUNCTION SPACES 2012 (Kyushu Institute of Technology, Tobata Campus, September 12, 2012).

5. T. Shimomura, Hardy averaging operator on generalized Banach function spaces, RIMS workshop Potential Theory and its Related Fields (Kyoto University, Faculty of Engineering), September 6, 2012. (September 3-7)

6. Y. Mizuta, Sobolev's inequality for Riesz potentials in Lorentz spaces of spaces of variable exponent, RIMS workshop Potential Theory and its Related Fields (Kyoto University, Faculty of Engineering), September 4, 2012. (September 3-7)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

下村 哲 (SHIMOMURA TETSU)

広島大学・大学院教育学研究科・教授

研究者番号: 5 0 2 9 4 4 7 6

(2) 研究分担者

水田 義弘 (MIZUTA YOSHIHIRO)

広島工業大学・工学部・教授

研究者番号: 0 0 0 9 3 8 1 5