

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 21 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540177

研究課題名(和文) 等質開凸錐と等質実ジューゲル領域の代数構造と幾何学的調和解析

研究課題名(英文) Algebraic structure and geometric harmonic analysis of homogeneous open convex cones and homogeneous real Siegel domains

研究代表者

野村 隆昭 (Nomura, Takaaki)

九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：30135511

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円

研究成果の概要(和文)：ユークリッド空間内の錐で開集合にも凸集合にもなっているものを開凸錐という。そこに線型リー群が推移的に作用するものを等質開凸錐と呼ぶ。等質開凸錐を、その頂点である原点を通らない超平面で切った切り口に現れる領域を実ジューゲル領域と呼ぶ。本研究はそれらの様々な構造を調べ、とくに代数構造に密接に関係する基本相対不変式の明示的記述、そして向き付けグラフを援用しての一般の等質開凸錐の実現という研究成果を得た。

研究成果の概要(英文)：Cones which are both open and convex sets in Euclidean spaces are called open convex cones. Open convex cones on which Lie groups act transitively are said to be homogeneous. Domains that appear as sections of homogeneous convex cones by hyperplanes not passing through the origin are called homogeneous real Siegel domains. In this research, we have investigated their various structures, in particular, we have described explicit formulae of basic relative invariants which have intimate relations with the algebraic structure, and have obtained realizations of general open convex cones through oriented graphs.

研究分野：非可換調和解析

キーワード：等質開凸錐 等質ジューゲル領域 基本相対不変式 非結合的代数 左対称代数 向き付けグラフ 正定値対称行列

1. 研究開始当初の背景

(1) 複素ゼーゲル領域は、1957年にピヤテツキー・シャピロによって導入されたもので、複素平面における上半平面の高次元・行列空間への一般化であり、有界領域に正則同相となる。これによって、エリー・カルタンが1935年に出版された論文で提示した問題「 $n-4$ のとき、 \mathbb{C}^n に非対称な有界等質領域が存在するか」に肯定的な解答が与えられた。実際には、 $n=7$ となると互いに同値ではない非対称なゼーゲル領域が連続濃度で存在する。また等質開凸錐の理論はヴィンバークによる1963年の論文で基礎が置かれ、こちら11次元以上ならば、互いに線型同型ではない連続濃度の非対称な等質開凸錐が存在する。

(2) 等質開凸錐と等質ゼーゲル領域の幾何学的構造の研究は、1970・80年代に飛躍的に発展したものの、解析学に関しては、その特別の場合である対称錐やエルミート対称空間の範囲を越えてしまうと、明示的に記述できる等質領域上の解析学として、追究すべき所がまだ数多く残っている。研究代表者の野村は、対称領域の持つ端正さを解析学的に際立たせる研究を2000年度以来推進しており、順調に成果を挙げてきた。

(3) 研究代表者野村の2006年以降の研究の一つに、興味深い等質開凸錐の系列をみつけるといったテーマがあった。たとえば、2007年度の研究では、任意階数の極めて興味深い非対称な等質開凸錐を発見している。その例では、付随する基本相対不変式の次数が、公差1の等差数列をなしており、2008年に出版された連携研究者の伊師との共著論文(論文提出は2006年)に書いた階数3の例の一般化になっている。

(4) さらに連携研究者の伊師との研究では、双対錐とは線型同型であるが、階数が3以上の任意の自然数になる自己双対ではない既約な等質開凸錐の例も発見している。

2. 研究の目的

(1) 等質開凸錐と等質ゼーゲル領域について、研究代表者の野村、および連携研究者の伊師が過去15年以上にわたって、単独あるいは共同で得てきた研究成果を踏まえ、代数・幾何・解析など様々な手法を駆使して、より総合的な観点からの研究を推進する。等質ゼーゲル領域については、複素領域だけではなく、実領域までも研究対象を広げる。等質開凸錐や等質ゼーゲル領域は式で明示的に記述される領域であり、そのカテゴリーに対称空間も含まれていて、上記歴史的経緯からしても、極めて重要な研究対象である。

(2) しかしながら、等質開凸錐一般、あるいは実等質ゼーゲル領域一般、というのは、現時点ではあまりにも茫洋とした研究対象であり、対称領域のときのような精緻で興味深い研究成果を産み出して行くには、十分にリッチな代数構造を持ち、非対称領域といえども対称性に近い幾何学的性質をもつよう

なクラスを抜き出して行く必要があることが、これまでの野村の研究からわかっている(失敗の経験)、したがって、対称錐に近い構造を持つ非対称な等質開凸錐や等質ゼーゲル領域を体系的に抽出する方法をみつけることは大変意義深い研究である。

(3) いくつかの実験的研究により、ユークリッド型ジョルダン代数の自己共役表現からクランを導入できることがわかっているので、これを一般的に定式化し、それに付随する等質開凸錐の基本相対不変式を明示的に書き上げる。さらに、その双対錐に付随する基本相対不変式の明示的な公式を得る。

(4) 山崎貴史の修士論文「等質開凸錐の行列による実現」をより洗練した形で学術論文としてまとめる。グラフ理論における用語を使って、より現代的な記述をする。また、等質開凸錐の理論における重要で基本的な定理をすべてクランの用語で統一し、非結合的な行列代数であるT代数や、結合的ではあるがかなり特殊なN代数を表面には出さずに議論しそして定理を述べ、等質開凸錐が非専門家にも十分容易にアクセスができる数学的对象となることに貢献できることも目指す。

3. 研究の方法

(1) 等質開凸錐がどれだけ対称錐に近いかを見定める一つの基準として、基本相対不変式の次数のなす有限数列がある。対称錐の場合は、基本相対不変式の次数が公差1の等差数列をなしている。ただし、このことだけでは対称錐を特徴付けられないことは、すでに研究開始当初の背景(3)で述べた。そこで、まずはユークリッド型ジョルダン代数の自己共役表現から得られるクラン(左対称代数の一種)に付随する等質開凸錐の基本相対不変式を、元のジョルダン代数の基本相対不変式と自己共役表現の持つ情報による明示的な記述を得ることから研究を始めた。

(2) 国内外の研究集会に出かけて、研究発表や研究討議を重ねる。2012年度は、本科研費採択以前から招待を受けていた、香港での国際会議、チェコのブルノでの国際会議、フランス・リュミニエでの国際会議に赴いて、研究発表と研究討議をおこなった。2013年度は、ルーマニアのプロイエシュティでの国際会議で研究発表をし、またドイツ・チュービンゲン大学にカウプ退職教授を訪ね、同教授の専門であるゼーゲル領域に関する討議をおこなった。そして、ともに他経費による研究集会の共同開催であったが、オランダのKdV研究所のヘルミンク教授との名古屋大学における日蘭共同セミナー、チュニジア・スファックス大学のバクルーティ教授とのチュニジア・スース市での研究集会では、多くの参加者達と本研究課題についての研究討議も行なうことができた。2014年度は、クレルモン・フェラン大学にマンション教授を訪ね、同教授主催のセミナーで講演をすると

もに、同教授と左対称代数に関する研究討議を重ねた。また、フランスのランス大学のペヴツナー教授、ロレーヌ大学のクファニ教授を訪ねて、等質開凸錐に関して両大学のセミナーにおいて講演をし、研究討議をおこなった。他経費で訪問したスファックス大学のバクルーティ教授、チュニス大学のウエルディアンヌ教授と、本研究課題に関する討論もおこなった。

4. 研究成果

(1) ユークリッド型ジョルダン代数の自己共役表現から得られる等質開凸錐とそれに付随する基本相対不変式の研究成果

ユークリッド型ジョルダン代数 V とその自己共役表現 (\cdot, E) があつたとき、 $V_E := V + E$ には自然にクランの構造が入る。 E が零空間でない限り、すなわち V_E が零表現でない限りクラン V_E は単位元を持たないので、その場合は単位元を付加することにより、単位元を持つクランを得る。このクランには、一般に非対称な等質開凸錐が対応する。この等質開凸錐に付随する基本相対不変式の明示的な記述を得た。またその双対クランに付随する基本相対不変式の明示的な記述も得ている。後者では、基本相対不変式の次数が、公差1の等差数列をなすような非対称な等質開凸錐を系統的に提供することにもなっていて、2008年の伊師英之との共著論文での例や、未発表であった上記研究開始当初の背景の(3)で述べた例をも一般化している。以上の成果は後述の学術論文 [2] および [4] として、印刷公表した。

なお、本研究成果を受け継いだ中島秀斗の単独研究により、一般の等質開凸錐に付随する基本相対不変式の、帰納的ではない、完全に明示的な記述を得るという画期的な成果のベースにこの研究成果(1)はなっている。

(2) 一般の等質開凸錐の実現についての研究成果

向き付けグラフを援用して、一般の等質開凸錐を実現する研究に取り組んだ。与えられた等質開凸錐から、そのクラン構造における部分空間の次元情報によって、向き付けグラフを描くことができる。そしてこのグラフを元に、等質開凸錐が、正定値実対称行列のなす開凸錐のいくつかのスライスを束ねることによって実現できることを示した。証明はこれまでの基本相対不変式の研究を踏まえており、決して容易ではないが、得られた結果は、完全にブラック・ボックス化することに成功している。すなわち、グラフから機械的な作業を経て実現を得るという形になっている。そして、束ねられる等質凸錐は、もとの等質開凸錐から順序を除いて一意的に定まるものであり、この意味で実現の一意性もある。ヴァインバーグが初めて非対称な等質開凸錐を例示したときのアイデアをそのままの形で一般化しているという点で、従前からあつた様々な実現方法を凌駕する研究成果と言える。

る。以上の成果は、学術論文 [1] として、印刷公表した。

本研究成果は、とくに非専門家に対して、非対称な等質開凸錐を身近なものにできることが期待される。とくに近年に見られる等質開凸錐の統計学への応用において、本研究成果は有用であると考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

[[1] Takashi Yamasaki, Takaaki Nomura, Realization of homogeneous cones through oriented graphs, *Kyushu J. Math.*, 69 (2015), 11–48.

Doi:10.2206/kyushujm.69.11

[2] Hideto Nakashima, Takaaki Nomura, Basic relative invariants on the dual clans obtained by representations of Euclidean Jordan algebras, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 59 (2014), 443–451.

http://imar.ro/journals/Revue_Mathematique/pdfs/2014/4/4.pdf

[3] 中島秀斗, 野村隆昭, Dual clans defined by representations of Euclidean Jordan algebras and the associated basic relative invariants, *数理解析研究所講究録*, 1877 (2014), 1–8.

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1877-01.pdf>

[4] Hideto Nakashima, Takaaki Nomura, Clans defined by representations of Euclidean Jordan algebras and the associated basic relative invariants, *Kyushu J. Math.*, 67 (2013), 163–202.

Doi:10.2206/kyushujm.67.163

[学会発表](計12件)

[1] 野村隆昭, 等質開凸錐を具現化する, 表現論ワークショップ, 2014年12月25日, 鳥取市。

[2] Takaaki Nomura, Homogeneous convex cones and basic relative invariants, Generalizations of symmetric spaces, Leiden (the Netherlands), 25 Nov. 2013.

[3] 野村隆昭, 等質開凸錐と基本相対不変式, 広島大学大学院理学研究科数学教室談話会, 2013年10月29日。

[4] Takaaki Nomura, Basic relative invariants associated to homogeneous convex cones, The 11th international workshop on differential geometry and its applications, Proiesti (Romania), 20 Sep. 2013,

[5] 野村隆昭, Dual clans defined by representations of Euclidean Jordan algebras and the associated basic relative invariants, 表現論および表現論の関連す

る諸分野の発展，京都大学数理解析研究所，2013年6月25日。

[6] 野村隆昭，Euclid型Jordan代数のclan構造における右乗法作用素の帰納的構造と行列式，2013年度日本数学会年会，2013年3月21日，京都大学。

[7] 中島秀斗，野村隆昭，Lorentz型Jordan代数の表現から得られるclan，2013年度日本数学会年会，2013年3月21日，京都大学。

[8] 中島秀斗，野村隆昭，Jordan代数の表現から得られるclanの双対clan，2013年3月21日，京都大学。

[9] 野村隆昭，Herm(2,K)，表現論ワークショップ，2012年12月26日，鳥取市。

[10] Takaaki Nomura, Homogeneous convex cones associated to representations of Euclidean Jordan algebras, Harmonic analysis, operator algebras, and representations, Luminy (France), 23 Oct. 2012.

[11] Takaaki Nomura, Homogeneous convex cones associated to representations of Euclidean Jordan algebras, Algebra, Geometry, Mathematical Physics, 12 Sep. 2012, Brno (Czech).

[12] Takaaki Nomura, Homogeneous convex cones associated to representations of Euclidean Jordan algebras, International conference on Jordan theory, analysis and related topics, 30 April 2012, Hong Kong.

〔図書〕(計1件)

野村隆昭，微分積分学講義，共立出版，2013年，253pp。

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

出願年月日：

国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

出願年月日：

取得年月日：

国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~tnomura/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

野村 隆昭 (NOMURA Takaaki)

研究者番号：30135511

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

伊師 英之 (ISHI Hideyuki)

研究者番号：00326268