2版

様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ８ 日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４０１７８
研究課題名（和文）退化した微分作用素に対する確率微分幾何の新展開

研究課題名（英文）A new development of stochastic differential geometry associated with degenerate differential operators

研究代表者
谷口　説男（TANIGUCHI, Setsuo）

九州大学・基幹教育院・教授

研究者番号：７０１５５２０８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：CR-多様体上のKohn-Rossiラプラシアンの実部として得られる退化した2階偏微分作用素であるサブラプラシアンを生成作用素とする拡散過程(CR-ブラウン運動)を、リーマン多様体上のブラウン運動の構成方法であるElles-Elworthy-Malliavinの手法を拡張して利用することで、大域幾何学的に構成した。さらに、CR-ブラウン運動を用いて、サブラプラシアンに付随する熱方程式、ディリクレ問題の確率解析的手法による考察を行った。

研究成果の概要（英文）：A diffusion process generated by a sub-Laplacian, which is a real part of the Kohn-Rossi Laplacian on a CR-manifold, is constructed in a globally geometrical manner by extending the Elles-Elworthy-Malliavin approach to the Brownian motion on a Riemannian manifold. Using the diffusion process (CR-Brownian motion), the heat equation and the Dirichlet problem associated with the sub-Laplacian are investigated in a stochastically analytic manner.

研究分野：確率解析

キーワード：CR-多様体　CR-ブラウン運動　熱核　確率微分幾何　Malliavin解析

１．研究開始当初の背景

K.D. Elworthy, P. Malliavin, J.-M. Bismut, S. Watanabe などの研究成果に代表される確率微分幾何学の分野における種々の研究は，すべてリーマン多様体もしくはリー群に関するものであった．すなわち，非退化作用素ラプラシアンもしくは大域的なヘルマンダー型微分作用素に対する拡散過程を出発点としていた．退化しており，さらに大域的なヘルマンダー型の表示を持たない微分作用素に対する具体的なかつ体系的な確率微分幾何学の研究成果はまだなかった．また，サブラプラシアンに基づく解析的手法による拡散過程の考察が進んでいたが，あくまでも熱方程式ありきの研究であり，確率微分方程式を利用して拡散過程を構成してゆく確率幾何学的手法ではなかった．

強擬凸 CR 多様体上の Kohn-Rossi ラプラシアン$\square_b$は，退化した 2 階実微分作用素$\triangle_b$と実ベクトル場 T の線形結合$\square_b=\triangle_b+inT$（$i^2=-1$）という形をしている．$\triangle_b$ は退化した微分作用素であり，大域的なヘルマンダー型微分作用素として表すことができない．

研究代表者は，リーマン多様体上のブラウン運動の確率微分幾何学的構成法である Elles-Elworthy-Malliavin の手法を拡張し，$\triangle_b$ に付随する拡散過程（CR-ブラウン運動と呼ぶ）を CR-構造に付随した複素ベクトル束$T_{1,0}$を基礎とするユニタリ主束の確率微分方程式を利用して構成する方法を発見していた．しかし，構成法には局所座標が用いられ，大域幾何学的な構成とはなっていなかった．さらに構成された CR-ブラウン運動を利用して，$\triangle_b$ に付随する熱核の構成とその漸近挙動の解析，ディリクレ問題などの問題などを大域幾何学的考察と結び付けて解決することが期待できた．

２．研究の目的

多様体上の退化した微分作用素に対する，解析的手法に依らず，確率微分方程式を中心に据えた新たな確率微分幾何学を展開することを目的とした．

具体的には，退化した微分作用素である Kohn-Rossi ラプラシアン$\square_b$ をもつ強擬凸 CR 多様体上で，

(i)$\square_b$の実部であるサブラプラシアン$\triangle_b$を生成作用素とする拡散過程（CR-ブラウン運動）をリーマン多様体上のブラウン運動を構成する確率幾何学的手法である Elles-Elworthy-Malliavin の手法を拡張し，さらに局所座標を表に出さない大域幾何学的な手法で構成すること，

(ii) $\triangle_b$ に付随する熱核(熱方程式の基本解)を，CR-ブラウン運動を用いて確率解析的に表示し，熱核の短時間漸近展開を確立すること，および

(iii) CR-ブラウン運動の基本的性質(爆発問題，再帰性) を CR 幾何学を反映させる形で解明すること，

により，新たな確率微分幾何学を体系的に展開することを目的とした．

３．研究の方法

(1) CR-構造を定める複素ベクトル束 $T_{1,0}$ 上の複素接続である Tanaka-Webster 接続を大域的に利用して，$T_{1,0}$ の複素正規直交枠からなるユニタリ主束$U(T_{1,0})$上に基本複素ベクトル場 $L_1,L_2,\ldots,L_n$ を構成し，これから定まるユニタリ主束上の確率微分方程式

(*) $$dr_t=\sum_{i=1}^{n} Re\,L_i(r_t)\circ d\xi_t+\sum_{i=1}^{n} Im\,L_i(r_t)\circ d\eta_t$$

の解 r_t の CR-多様体 M への射影として CR-ブラウン運動を実現した．

とくに $L_1,L_2,\ldots,L_n$ の構成は，局所座標ではなく，接続形式に関する大域的な手法を通じて行った．

(2) CR-ブラウン運動(正確には $U(T_{1,0})$上の r_t) により，熱核を

(#) $$p(t,x,y)=E_x[\delta_y(r_t)]$$

と期待値表現し，Watanabe の漸近理論（とくに Takanobu の漸近展開）を援用して，対角線成分 $p(t,x,x)$の $t\to 0$ における漸近展開の係数を求めた．

まず，拡散過程の座標近傍からの離脱時間の分布が原点で指数減衰することを利用して，(#)を局所表現に置き換えられること示した．その後，局所近傍上での大域座標表現を用いて，漸近展開を実行した．とくに CR-多様体の局所構造が漸近的にハイゼンベルク群の形をしていることを利用して，漸近展開係数を求めた．

(3) これらの問題の解決に関連し，派生的に生まれた問題である拡散過程の摂動と熱核の漸近展開の関係，および確率振動積分の漸近挙動（ウィナー空間上の停留位相法）について考察を行った．

(4) これらの研究を遂行するにあたり，連携研究者ならびに国内確率解析研究者との情報交換を密に行った．とくに，連携研究者との研究打ち合わせを行うために旅費を使用した．また確率論研究者との意見交換をはじめとする研究交流のために研究集会に出席した．このためにも旅費を使用した．

(5) 研究成果の評価を得るために，研究集会「確率解析」(於京都大学数理解析研究所，2014 年 3 月)，UK-Japan Stochastic Analysis School 2014(於 University of Warwick，2014 年 9 月)で講演を行った．これらの発表のために

旅費を使った.

(6) 確率解析関係，幾何学関係，および偏微分方程式関係図書を購入し，研究推進に利用した.

４．研究成果

(1) CR-構造を定める複素ベクトル束 $T_{1,0}$ 上の複素接続である Tanaka-Webster 接続を用いて，ユニタリ主束 $U(T_{1,0})$上に基本複素ベクトル場 $L_1,L_2,\ldots,L_n$ を構成した．これらは局所座標を用いて既に構成していたが，その際には明確に認識できていなかった事実である，複素ベクトル場を構成するにもかかわらず，CR-多様体が実多様体であることを反映して，実際の構成は実解析的に行わなければならないことを見出した．これにより実際の解析においては $\mathrm{Re}L_1, \mathrm{Im}L_1, \ldots, \mathrm{Re}L_n, \mathrm{Im}L_n$ が中心的な役割を果たす事情がより明瞭になった.

(2) (1)の基本複素ベクトル場を用いて，ユニタリ主束 $U(T_{1,0})$上の確率微分方程式(*)の解の射影 $\pi(r_t)$を用い，CR-ブラウン運動 X_t を構成した．構成に際しては，複素ユークリッド空間上のブラウン運動がユニタリ変換で不変であることを利用し，$\pi(r_0)=x$ であれば同じ CR-ブラウン運動の分布が得られること，すなわち，ファイバーごとの同一性があることを示した．この手法は，リーマン多様体上のブラウン運動の構成に用いられる直交枠束上の Elles-Elworthy-Malliavin の手法を複素ユニタリ主束へと拡張したものである.

(3) $\mathrm{Re}L_1, \mathrm{Im}L_1, \ldots, \mathrm{Re}L_n, \mathrm{Im}L_n$ が張るリー環の π の誘導する接バンドル $TU(T_{1,0})$から TM への射影による像が M の接ベクトル空間と一致することを確かめた．ここでは，$\mathrm{Re}L_k$ と $\mathrm{Im}L_k$ のリー内積から欠落した 1 次元方向であるベクトル場 T が生まれるという CR-多様体に特有の性質を利用した．これにより，マリアバン解析における部分的準楕円性の結果(研究代表者による射影に限らない一般化された成果(①))を援用し，(#)のような熱核の期待値表現が可能であることを証明した.

(4) 部分的準楕円性の考察に着想を得て，CR-ブラウン運動に沿う 1-微分形式の確率線積分の分布が滑らかな密度関数を持つための十分条件を見出した．$\pi^*L_1,\ldots, \pi^*L_n$ が M の複素ユニタリ枠を与えていることに対応した考察に基づいているが，リーマン多様体上の 1-微分形式の確率線積分の同時分布に対するジェット束を用いる研究代表者の成果(①)に比べて改良の余地を残すものとなっており，継続的な考察を継続して行うこととしている.

(5) $\mathrm{Re}L_1$ と $\mathrm{Im}L_1$ のリー内積から欠落した 1 次元方向であるベクトル場 T が生まれるという CR-多様体に特有の性質と境界点の分類条件（研究代表者が D. W. Stroock 氏との共同研究で確立(②)）を用いて，CR-ブラウン運動 X_t を用い，C^3 境界を持つ領域 D 上のディリクレ問題$\triangle u=0$, $u|_{\partial D}=f$ の解を $E[f(X_\tau)]$期待値表現できる（τ は領域からの離脱時間）ことを示した．確率解析的には解は弱解として実現されるが，これに$\triangle_b$ が準楕円性を持つことを合わせて，確率解析的な解が古典解であることも注意した.

(6) (1)～(5)に述べた成果は，論文「A construction of diffusion processes associated with sub-Laplacian on CR manifolds and its applications」(博士課程指導学生近藤宏樹との共著論文）にまとめ，現在 Journal of Mathematical Society of Japan に投稿中である．また，これらの成果に基づき次項〔学会発表〕に挙げた二つの講演を行った.

(7) 熱核の対角線上の漸近挙動 $p(t,x,x)$ $(t\to 0)$ について，座標近傍への局所化をおこなうことで, ユークリッド空間上の Watanabe の漸近理論（Takanobu の漸近展開）が適用し，

$$p(t,x,x) \sim t^{-(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} C_k(x) t^k$$

と展開できることを確認した．さらに当初予想していたように $C_0(x)$は x に依存しない定数であることを証明できた．実際，$C_0(x)$は平坦な CR-多様体であるハイゼンベルク群の場合に x=0 での漸近展開に現れるものと一致している．これは，CR-多様体の点 x の周りの局所座標がハイゼンベルク群の大域座標により漸近的に近似できる事実を反映している.

(8) 上述 $C_0(x)$がハイゼンベルク群に由来するメカニズムについての考察を開始した．,この突端として，ハイゼンベルク群上の CR-ブラウン運動を支配するベクトル場に原点で退化するベクトル場の摂動を付加した拡散過程を考え，その熱核 $q(t,x,y)$の対角線の原点での短時間漸近挙動 $q(t,0,0)$ $(t\to 0)$について考察した．そして，その C_0-項がハイゼンベルク群のものに $o(t)$（$t\to 0$ で 0 となる項）を付加した形をしていることを見出した.

この考察に着想を得て，一般の確率微分方程式を摂動してえられる確率微分方程式に付随する熱核について，元の確率微分方程式の熱核との関係について考察を始めた．元の確率微分方程式が非退化であれば，ハイゼンベルク群と同様の結果（元の確率微分方程式の熱核の C_0 項に $o(t)$という項を付け加える）を見出した．しかし，ハイゼンベルク群のような退化した生成作用素を持つ場合には，部分的に非退化な成分との関連を具体的に記述する方法をまだ見いだせていない.

(9) サブラプラシアン$\triangle_b$ に inT を加えると

Kohn-Rossi ラプラシアン$\square_b$が出現することに鑑み，CR-ブラウン運動を利用した$\square_b$に付随する熱核はラプラス-フーリエ型の重みを付けた期待値表現となることが予想できる．この観点から，ウィナー空間上のラプラス-フーリエ型変換である相関数 q，振幅関数 ψ を持つ確率振動積分

$$E[e^{i\lambda q}\psi]$$

の漸近挙動について考察を行い，新たな振幅関数のクラスについて停留位相法が成立することを見出した．この結果を論文にまとめ，Kyushu Journal of Mathematics で公開した（次項〔雑誌論文〕①）．

〈引用文献〉

①S. Taniguchi, Malliavin’s stochastic calculus of variations for manifold-valued Wiener functionals and its applications, Z. W., 65, (1983), 269–290.

②D.W. Stroock and S. Taniguchi, Regular points for the first boundary value problem associated with degenerate elliptic operators, in “Probability theory and harmonic analysis” (J.-A. Chao and W.A. Woyczynski eds.), Marcel Dekker, New York, 1986.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　1　件）

① Setsuo Taniguchi, A new class of amplitude functions for the stationary phase method on an abstract Wiener space, 査読有，Kyushu Jour. Math. 69 (2015), 219-228.

〔学会発表〕（計　2　件）

① 谷口説男, Rolling manifolds，研究集会「確率解析」(2014.3.18-20)，京都大学数理解析研究所（京都市）、2014 年 3 月 20 日

② Setsuo Taniguchi, Diffuison processes on CR-manifolds, UK-Japan stochastic analysis school 2014, University of Warwick, Coventry（United Kingdom），2014 年 9 月 5 日

〔図書〕（計　1　件）

① 谷口説男・松本裕行，培風館，確率解析，2013，302 頁
ISBN-10: 4563010855

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

○取得状況（計　0　件）

〔その他〕
ホームページ等
https://mserve.artsci.kyushu-u.ac.jp/groups/s_taniguchi/

６．研究組織

(1)研究代表者

谷口　説男（TANIGUCHI,　Setsuo）
九州大学・基幹教育院・教授
研究者番号：７０１５５２０８

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者

松本　裕行（MATSUMOTO,　Hiroyuki）
青山学院大学・理工学部・教授
（申請時：山形大学・理学部・教授）
研究者番号：００１９０５３８

白井　朋之（SHIRAI,　Tomoyuki）
九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授
研究者番号：７０３０２９３２

植村　英明(UEMURA,　Hideaki)
愛知教育大学・教育学部・教授
研究者番号：３０２０３４８３