

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 10 月 24 日現在

機関番号：17201

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540179

研究課題名(和文) 楕円型偏微分方程式の解の対称性

研究課題名(英文) Symmetry of solutions for elliptic partial differential equations

研究代表者

梶木屋 龍治 (Kajikiya, Ryuji)

佐賀大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：10183261

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：二つの閉部分群 G, H を考える。ただし H は G の閉部分群とする。楕円型偏微分方程式が領域と方程式の非線形項が G 作用のもとで不変であると仮定する。非線形項の係数関数が、領域内部よりも境界近傍で密度が大きい場合を考察する。このとき、 G の軌道と H の軌道が異なるとき、 H 不変な最小エネルギー解は G 不変でないことを証明した。ここで最小エネルギー解とは、レイリー商が最小となる解のことである。従って、時間発展の方程式において最も安定した定常解となる。この結果様々な対称領域に対して、ある程度の対称性を持つが強い対称性を持たない正值解の存在が示された。

研究成果の概要(英文)：We study elliptic partial differential equations in symmetric domains. Let H and G be closed subgroups of the orthogonal group such that H is a closed subgroup of G and the domain is G invariant. Then we show the existence of a positive solution which is H invariant but G non-invariant under suitable assumptions of H, G and the coefficient function of the equation. Such a solution is obtained as a least energy solution. Here a least energy solution is a solution which is a minimizer of the Rayleigh quotient. Our theorem ensures the existence of various solutions which has a weak symmetry but does not have a strong symmetry.

研究分野：楕円型偏微分方程式

キーワード：楕円型偏微分方程式 変分法 最小エネルギー解 解の対称性 群不変性

1. 研究開始当初の背景

半線形楕円型偏微分方程式を球で考えた場合に係数関数が球対称であっても、最小エネルギー解が球対称でないことが起こる。このような現象がなぜ起きるのか？ またどのような形の楕円型偏微分方程式に起きるのかについては、あまり詳しい研究が行われていなかった。最小エネルギー解は最も安定した定常解であるため、様々な時間発展の方程式の漸近挙動と深く結びついている。その解の性質、特に解の形状を知ることは、偏微分方程式論で重要なことである。本研究ではそのような解の対称性、非対称性を調べる。

2. 研究の目的

様々な対称領域、例えば円、円環、回転体、シリンダー領域などのように直交群のある部分群作用の下で不変な領域を考える。そこにおいて楕円型偏微分方程式を考察し、群不変な解の存在、群不変でない解の存在を証明する。またそれらの解を放物型偏微分方程式の定常解として考えるときの安定性を調べることが本研究の目的である。

3. 研究の方法

本研究を推進するためには、様々な数学的道具、資料が必要となる。まず、多くの専門書、論文、文献、数学雑誌、プレプリント等の参考資料を集める。次にこれら进行分析、整理して既知の結果を十分に把握し、理解して研究の基礎とする。また集めた資料は、パソコン内にデジタル化したデータとして保存し、これらを常時参照できるようにする。これらの準備の元に、問題を分析し考察を行う。パーソナルコンピュータによる数値シミュレーションの助けを借りて、解の対称性と領域の幾何学的特徴の関係を調べる。さらに他研究者との討論を行い、国内外の多くの研究集会に出席し、研究結果を発表する。またそこで、新しい情報を入手し研究の進展に役立てる。

4. 研究成果

1. 直交群の閉部分群 G を考える。楕円型偏微分方程式を領域と方程式の非線形項が G 作用のもとで不変である場合に考察した。もし非線形項にかかる係数関数が領域内部よりも境界近傍に極端に大きな密度を持つとき最小エネルギー解が G 不変でないことを証明した。ここで最小エネルギー解とは、レイリー商が最小となる解のことである。従って、時間発展の方程式において最も安定した定常解となる。

さらに、二つの閉部分群 G, H を考える。ただし H は G の閉部分群とする。楕円型偏微分方程式を領域と方程式の非線形項が G 作用のもとで不変であると仮定する。非線形項の係数関数が、領域内部よりも境界近傍で密度が大きい場合を考察する。このとき、 G の軌道と H の軌道が異なるとき、 H 不変な最小エネルギー解は G 不変でないことを証明した。この結果様々な対称領域に対して、ある程度の対称性を持つが強い対称性を持たない正值解の存在が示された。

2. 半線形熱方程式の定常解の安定性について研究した。この方程式は、今までにある程度の研究がなされている。その結果、初期値問題に対する解の非一意性が知られている。しかしながら、定常解の安定性についてはあまり研究がなされていなかった。本研究において、符号変化する解が漸近安定でないこと、零解が不安定であること、さらに正值定常解が指数漸近安定であることなどを証明した。さらに正值定常解の漸近安定の指数は、正值定常解の廻りでの線形化作用素の第1固有値であることを証明している。さらにその指数が最適であることも証明した。空間1次元では、定常解の構造が零点の個数によって明確に記述されることを証明し、これを使ってすべての定常解の安定性が証明された。その結果、正值解および負値解は指数漸近安定であり、すべての符号変化解は、不安定であることを証明した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 22件)

1. Stability of stationary solutions for semilinear heat equations with concave nonlinearity. *Communications in Contemporary Mathematics*, 17, (No. 6) (2015), 1-29

G. Akagi and R. Kajikiya 査読有
DOI: 10.1142/S0219199715500017

2. Partially symmetric solutions of the generalized Henon equation in symmetric domains. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 46, (No. 1), (2015), 191-221.
R. Kajikiya 査読有

3. A priori estimate for the first eigenvalue of the p-Laplacian. *Differential and Integral Equations*, 28, (No. 9-10), (2015), 1011-1028.
R. Kajikiya 査読有
4. Multiple positive solutions of the Emden-Fowler equation in hollow thin symmetric domains. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 52, (No. 3-4), (2015), 681-704.
R. Kajikiya 査読有
DOI: 10.1007/s00526-014-0729-6
5. Symmetry and stability of asymptotic profiles for fast diffusion equations in annuli. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (e. Analyse Non Linéaire)*, 31, (No. 6), (2014), 1155-1173.
G. Akagi and R. Kajikiya 査読有
DOI:10.1016/j.anihpc.2013.08.006
6. Three positive solutions of the one-dimensional generalized Henon equation. *Results in Mathematics*, 66, (No. 3), (2014), 427-459.
R. Kajikiya 査読有
DOI: 10.1007/s00025-014-0385-3
7. Positive solutions of the p-Laplace Emden-Fowler equation in hollow thin symmetric domains. *Math. Bohem.*, 139, (No.2), (2014), 145-154.
R. Kajikiya 査読有
8. Two sequences of solutions for indefinite superlinear-sublinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions. *Commun. Pure and Appl. Anal.*, 13, (No.4), (2014), 1593-1612.
R. Kajikiya and D. Naimen 査読有
DOI:10.3934/cpaa.2014.13.1593
9. Multiple bifurcations of sign-changing solutions for one-dimensional p-Laplace equation with a critical weight. *Advances in Differential Equations*, 19, (No.3-4), (2014), 283-316.
R. Kajikiya and Y.-H. Lee 査読有
DOI:http://projecteuclid.org/euclid.ade/1391109087
10. Two positive solutions for one-dimensional p-Laplacian with a singular weight. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 42, (No.2), (2013), 427-448.
R. Kajikiya, Y.-H. Lee and I. Sim 査読有
11. Sobolev norm estimates of solutions for the sublinear Emden-Fowler equation. *Opuscula Mathematica*, 33, (No.4), (2013), 713-723.
R. Kajikiya 査読有
DOI:http://dx.doi.org/10.7494/OpMath.2013.33.4.713
12. Least energy solutions and group invariant solutions of the Henon equation. *Advanced Nonlinear Studies*, 13, (No.3), (2013), 721-738.
R. Kajikiya 査読有
13. Stability analysis of asymptotic profiles for sign-changing solutions to fast diffusion equations. *Manuscripta Math.*, 141, (No.3-4), (2013), 559-587.
G. Akagi and R. Kajikiya 査読有
DOI: 10.1007/s00229-012-0583-9
14. Least energy solutions of the Emden-Fowler equation in hollow thin symmetric domains. *J. Math. Anal. Appl.*, 406, (No.1), (2013), 277-286.
R. Kajikiya 査読有
DOI: 10.1016/j.jmaa.2013.04.068
15. Non-even positive solutions of the Emden-Fowler equations with sign-changing weights. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 143, (No.3) (2013), 631-642.
R. Kajikiya 査読有
DOI:http://dx.doi.org/10.1017/S0308210511001594
16. Positive solutions of semilinear elliptic equations with small perturbations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141, (No.4) (2013), 1335-1342.
R. Kajikiya 査読有
DOI:http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-2012-11569-2
17. Multiple solutions of sublinear elliptic equations with small perturbations. *J. Math. Anal. Appl.*, 398, (No.2) (2013), 857-866.
R. Kajikiya 査読有

DOI:<http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.09.045>,

18. Non-even positive solutions of the one dimensional p -Laplace Emden-Fowler equation.

Applied Mathematics Letters, 25, (No.11) (2012), 1891-1895.

R. Kajikiya 査読有

DOI:<http://dx.doi.org/10.1016/j.aml.2012.02.057>

19. Least energy solutions of the generalized Henon equation in reflectionally symmetric or point symmetric domains.

J. Differential Equations, 253, (No.5) (2012), 1621-1646.

R. Kajikiya 査読有

DOI:<http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2012.05.004>

20. Mountain pass theorem in ordered Banach spaces and its applications to semilinear elliptic equations.

Nonlinear Differential Equations and Applications, 19, (No.2) (2012), 159-175.

R. Kajikiya 査読有

DOI: 10.1007/s00030-011-0122-5

21. Non-even least energy solutions of the Emden-Fowler equation.

Proc. Amer. Math. Soc. 140, (No. 4) (2012), 1353-1362,

R. Kajikiya 査読有

DOI:<http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-2011-11172-9>

22. Non-radial least energy solutions of the generalized Henon equation.

J. Differential Equations, 252, (No. 2), (2012), 1987-2003,

R. Kajikiya 査読有

DOI:<http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2011.08.032>

[学会発表](計 16件)

1. Nonradial positive solutions of the p -Laplace Emden-Fowler equation.

2016年3月16日--19日 日本数学会 筑波大学 梶木屋龍治

2. Symmetric solutions of semilinear elliptic equations. 2015年12月8日--11日, Osaka University, Osaka, Japan, 3rd Chile-Japan Workshop on Nonlinear PDEs.

R. Kajikiya

3. A priori estimate for the first eigenvalue of the p -Laplacian.

2015年9月13日--16日 日本数学会 京都産業大学 梶木屋龍治

4. Symmetric mountain pass lemma and sublinear elliptic equations. 2015年7月6日--10日, Universite Claude Bernard Lyon, Lyon, France, Equadiff2015. R. Kajikiya

5. Infinitely many solutions for sublinear elliptic equations. 2015年6月11日--12日, Pusan National University, Pusan, Korea,

2015 International Workshop on Nonlinear PDE and Applications. R. Kajikiya

6. Symmetric mountain pass lemma and sublinear elliptic equations.

2015年3月21日--3月24日 日本数学会 明治大学 梶木屋龍治

7. Group invariant positive solutions of the generalized Henon equation. 2014年7月7日--11日, Madrid, Spain, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications.

R. Kajikiya

8. Positive solutions of the Emden-Fowler equation in hollow thin symmetric domains. 2014年3月27日--28日, Pusan National University, Pusan, Korea, 2014 International Workshop on Nonlinear PDE and Applications.

R. Kajikiya

9. 一般化された Henon 方程式の3つの正值解の存在

2014年3月15日--18日 日本数学会 学習院大学 梶木屋龍治

10. Partially symmetric solutions of the generalized Henon equation

2013年9月24日--27日 日本数学会 愛媛大学 梶木屋龍治

11. Positive solutions of the p -Laplace Emden-Fowler equation in hollow thin symmetric domains. 2013年8月26日--30日, Charles University, Prague, Czech Republic, Equadiff13. R. Kajikiya

12. 穴の空いた対称領域における Emden-Fowler 方程式の正值解の非対称性

2013年3月20日--3月23日 日本数学会 京都大学 梶木屋龍治

13. 穴の空いた対称領域における Emden-Fowler 方程式の正值解の多重存在

2013年3月20日--3月23日 日本数学会 京

都大学 梶木屋龍治

14. 点対称及び面对称領域における Henon 方程式の最小エネルギー解

2012年9月18日--9月21日 日本数学会 九州大学 梶木屋龍治

15. 一般の対称領域における Henon 方程式の解の非対称性

2012年9月18日--9月21日 日本数学会 九州大学 梶木屋龍治

16. 1次元 p ラプラス方程式の解の多重分岐

2012年9月18日--9月21日 日本数学会 九州大学 梶木屋龍治

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況(計 0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

梶木屋 龍治 (Ryuji Kajikiya)

佐賀大学・工学系研究科・教授

研究者番号: 10183261

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号: