様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 ２５ 日現在

機関番号：２０１０３
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４０１８３
研究課題名（和文）高次元非線形波動方程式の臨界状態の解析とその応用

研究課題名（英文）Analysis on the critical nonlinear wave equations in high dimensions and its applications

研究代表者
高村　博之（TAKAMURA, HIROYUKI）

公立はこだて未来大学・システム情報科学部・教授

研究者番号：４０２４１７８１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円

研究成果の概要（和文）：非線形波動方程式の一般論は、小さい初期値をもつ古典解の最大存在時間を解析対象としている。空間４次元以上の高次元で、一般論の最適性に関わる有限時間爆発が起きる場合は空間４次元で２次の非線形項のみであり、未知関数自身の二乗という非線形項しか知られていない。本研究では、未知関数の二乗を含むその他の非線形項をもつ方程式を解析し、時間大域存在と有限時間爆発を分ける基準を探ることが目的である。

研究成果の概要（英文）：The general theory for nonlinear wave equations is devoted to the estimate of the maximal existence time of classical solutions with small data. In high dimensions in which the spatial dimension is grater than 3, its optimality can be discussed only for the quadratic terms in four space dimensions. In such a case, the square of unknown functions itself is known to be a unique example of the nonlinear term which leads to the blow-up of the solution in finite time. The purpose of this study is to look for a criterion which classifies the nonlinear terms including the square of unknown functions into the global existence case or the blow-up case.

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：非線形波動方程式　初期値問題　古典解　最大存在時間　時間大域存在　有限時間爆発

１．研究開始当初の背景

(1) 単独非線形波動方程式に対する初期値問題の古典解に対する一般論とは、一般的な滑らかな冪型非線形項に小さな初期値を与え、古典解がその初期値の小ささに応じてどれだけ長い時間存在することができるか、という疑問に答えるものである。その結果は非線形項の冪の次数と空間次元の組み合わせによって分類され、古典解の最大存在時間を初期値の小ささを表すパラメータを使って、具体的な形で下から評価するものである。その一般論は 1970 年代後半から多くの研究者達の貢献があり、1995 年に発表された Li Ta-Tien 氏と Zhou Yi 氏(共に中国復旦大学)による空間４次元で２次の非線形項に対する結果を最後に、ほぼ終わった状態のまま長い間完成を見ず進展がなかった。それは空間４次元で２次の非線形項に対する結果の最適性、つまりそれ以上の結果の改良が望めないということ、を示すことが残されているのが著名であった。また、後に急に判明したことであるが、空間２次元で３次の非線形項の分類と最適性が不完全であった。研究代表者は前者の未解決部分を、自身を含めた長年に渡る様々な研究者達によって蓄積された解析技術を用いて、2011 年に発表した若狭恭平氏（公立はこだて未来大学学部４年、現：北海道大学学振ＰＤ）との共同研究によって解決することができた。後者はほぼ同時期、2012 年に開始され 2014 年に発表された Zhou Yi 氏（中国・復旦大学）と Han Wei 氏（中国・中北大学）共同研究によって解の最大存在時間の最適な上からの評価が示され、それまで最適ではないと思われていた片山聡一郎氏（和歌山大学）の 2001 年に発表された下からの評価が最適な結果として一般論の中に組み込まれることになり一般論が終結した。

(2) 上記の一般論が対象とする初期値問題の初期値は、台がコンパクトであることが前提である。その仮定を外すと、時間大域解が得られるはずの高い次数の非線形項においても、有限時間内に解が無くなる場合があることが知られている。これは浅倉史興氏（追手門学院大学、現：大阪電気通信大学）による 1986 年に発表された空間３次元の結果が最初で、1990 年代に研究代表者を含めた日本人の研究者達、上見練太郎氏や久保田幸次氏（共に北海道大学）、津田谷公利氏（早稲田大学、北海道大学、現：弘前大学）、久保英夫氏（北海道大学、静岡大学、現：北海道大学）、肥田野久二男氏（早稲田大学、東京都立大学、現：三重大学）、黒川友紀氏（筑波大学、米子高専、現：北海道教育大学釧路校）ら、によって発展を遂げた。その中で初期値の無限遠方での減衰オーダーの臨界値が明らかにされ、空間次元に関わらず、方程式のスケール不変性に関係した量になっていることがわかった。しかし、特に減衰オーダーの最適性を証明する非存在定理の仮定は、解の正値性を得ることが容易な初期位置がゼロで初期速度が正の場合に限られていた。2009 年に発表された上坂洋司氏（日本大学）の研究によって、初期値問題と同値な積分方程式を時間微分したものを考えることによって、初期位置がある意味で正、かつ初期速度がゼロの場合に空間２次元で臨界減衰の最適性を示すことに成功した。その方法は、2010 年に研究代表者、上坂洋司氏、若狭恭平氏との共同研究によって、解に球対称性を仮定して高次元空間に拡張された。

２．研究の目的

(1) 上記背景(1)にある初期値問題を、弱い相互作用のある系に対して考察することが 1997 年の D.Del Santo 氏（イタリア・トリエステ大学）、V.Georgiev 氏（イタリア・ピサ大学）、E.Mitidieri 氏（イタリア・トリエステ大学）による共同研究から始まった。そこでも単独方程式と同様に、高次元空間での臨界指数をもつ系の解析が望まれており、その部分で弱解の最大存在時間の上からの評価を導出することが本研究の第一の目的である。

(2) また、単独方程式の場合、一般には空間４次元で２次の非線形項は時間概大域存在しか得られないが、上記背景(1)で示した最適性を保証する未知関数自身の二乗というもの以外に、その項を含みながら他に正値な項を加えるような自明な例とは異なる例を作ることができないか、また、逆に時間大域存在になるような非線形項の例を作ることができないか探ることが本研究の第二の目的である。これはいわゆる解の大域存在と有限時間内爆発を分ける臨界状態が概大域存在であり、低次元である空間２次元で３次と空間３次元で２次の非線形項に対しては、ほぼ未知関数の偏導関数による冪を考えればよいこともあり、ゼロ条件や非負条件といった時間大域解と時間概大域解を生み出す非線形項の分類条件が明確に提示されている。それに対して、空間４次元で２次は未知関数自身の二乗を含んだ状態で考察する必要があり、そのような判定法が期待できないことに困難さと重要性がある。

(3) 上記背景(2)で得られた結果を更に拡張して、初期位置と初期速度が共にゼロでないときに解の爆発を示すために必要な解の正値性を得ることが本研究の第三の目的である。空間２次元と空間３次元の低次元では解が全時空で正値性をもつため容易であり、古くは 1986 年に発表された L.A.Caffarelli 氏と A.Friedman 氏の共同研究によってその十分条件が知られていた。ここでは解に球対称性を仮定でして、高次元空間で同様の十分条件を提示することが目標となる。

３．研究の方法

(1) 上記目的(1)に関して以下に研究の方法を述べる。高次元での解の各点評価は、球対

称性の仮定が必要である。しかし、そうすることによって特に臨界冪に対する解の十分な正値性が得られなくなる。これを解決したのが背景(1)の結果である。それは未知関数の空間積分量を考察し、それが満たす常微分不等式の解の最大存在時間評価に帰着させることである。最適な結果を得るには二階導関数に関して閉じた積分不等式と逐次代入法を組み合わせる必要があるが、基本は常微分不等式の解析が重要である。したがって、まず、系に対応する常微分不等式系の解の最大時間評価を行うことが問題解決の鍵となる。

(2) 上記目的(2)について研究方法を以下に述べる。高次元空間での解の具体的な表記には、高次元特有の時間微分の損失が含まれる。これが高次元での解析に一様空間を導入できない最大の原因である。そこで、その解の表示から人工的に微分損失を取り除いた特殊な積分方程式を考え、一様空間で解析を行う。解の存在定理に関しては 1979 年に発表された F.John 氏の研究で初めて空間３次元の場合に導入された重み付き最大値ノルムを、高次元に拡張してその積分方程式を解析した研究代表者と上見練太郎氏、久保田幸次氏による 1994 年に発表された共同研究の方法を踏襲する。また、研究代表者と上見練太郎氏による 1994 年に行った未発表の共同研究で扱った別表現の積分方程式に対しても、同様の解析を試みる。解の非存在定理に関しては、解に球対称性を仮定して、M.A.Rammaha 氏の 1987 年に発表された研究で用いられた微分損失を含まない解の表示を用いて各点評価で証明を行う。その際、臨界冪に対する解の存在時間の評価を行う必要が出てくるが、そこは低次元空間でその困難を解消した Zhou Yi 氏の 1992～1993 年発表された一連の研究で導入された２階常微分等式の議論を援用する。

(3) 上記目的(3)について研究方法を以下に述べる。上記(2)と同様、解に球対称性を仮定して、M.A.Rammaha 氏の 1987 年に発表された研究で用いられた微分損失を含まない解の表示を用いて各点評価で証明を行う。特に、空間次元が偶数の場合は、初期位置に含まれる時間微分を実行した後の形から解の正値性を導出することがこの問題の鍵である。なぜなら、偶数次元では解の表示に特異性が含まれているからである。したがって、時間微分を実行する前に、変数変換を用いて特異性のある被積分関数の要素に時間微分が影響しない形に変形することで解決する。

４．研究成果

(1) 上記目的(1)と方法(1)に対する成果は以下の通りである。単に解の有限時間爆発を証明するだけなら時間区間の制限を何回行ってもよいので常微分方程式系の解析は容易である。しかし、解の最大存在時間の評価を導出するには、証明中に時間区間の制限は初期値に応じて１回しか行えない。その制限の適切な場所を、緻密な解の下からの評価を行うことにより発見することができた。結果、以下の２つの応用を得るに至った。

① 系の各成分が同じ伝播速度をもつ場合、臨界冪に対する解の最大存在時間の上からの最適評価を得た。これは下記に掲載の研究代表者と黒川友紀氏、若狭恭平氏との共著である発表雑誌論文③である。

② 系の各成分が異なる伝播速度をもつ場合にも、①と同じ常微分不等式系の解析が応用可能であるが、解の空間積分量の２階導関数の満たす積分不等式系の解析が、系の非対称性によって困難になる。この部分は、単独方程式のそれとは異なる逐次代入枠を新たに作り直すことによって解決することができた。この結果は、太田雅人氏（埼玉大学、現：東京理科大学)、黒川友紀氏との共同研究によるもので、現在投稿準備中である。

③ また常微分不等式の解の最大存在時間を評価している最中に、副産物的に以下の結果が得られた。それは劣臨界冪をもつ高次元空間での半線形波動方程式に対しては、今まで通りの常微分不等式の解に対する単なる有限時間爆発の結果と半線形波動方程式の解に対するリスケーリングの議論を組み合わせるだけでただちに所望の結果が得られると信じられていた。しかし、有限時間爆発の時刻が初期値のもつパラメータに依存しないことを言わなければならないことが見落とされていた。これは改良した精密な常微分不等式の解の最大存在時間の評価を用いると、ほんの少しの計算で導くことができるのではあるが、その際には直接所望の結果を得ることができ、解のリスケーリングの議論は不要となる。この結果は研究代表者の単著論文“Improved Kato’s lemma on ordinary differential inequality and its application to semilinear wave equations”, arXiv:1412.2550 として Nonlinear Analysis TMA に投稿中であったが、2015 年 5 月 11 日に掲載決定通知を受けた。

(2) 上記目的(2)と方法(2)に対する成果は以下の通りである。

① 通常の解の積分表示に含まれる微分損失を非線形項の部分から取り去った積分方程式は、微分方程式では非線形項の時間微分の時空積分量としてその影響が現れる。しかも、その積分項は未知関数に関して２次であり不定符号である。したがって当初の希望した結果、つまり、未知関数の二乗という単項だけでなく、それを含みつつ自明ではない概大域存在のもう１つの例を作ることができたことになった。これは解の積分表示の非

線形項に現れる微分損失は、解の最大存在時間に影響を与えないということ示しており、今後のより一般的な判定条件の導出に役立つものと思われる。この結果は、若狭恭平氏との共同研究で下記に掲載の発表論文①にまとめられている。その中では、空間４次元の２次だけでなく、一般次元の任意冪に対して解析が行われている。結果は、微分損失を取り除く前と同じ構造をもっており、臨界指数はいわゆるStrauss指数のままで変わらないことも示している。

② 非線形項に微分損失が発生しない特別な解の積分表示は、上記方法(2)で述べたように研究代表者と上見練太郎氏による 1994 年の未発表の共同研究で発見されている。微分損失がないことによるしわ寄せは未知関数の時間微分の時空積分量となって現れている。これを削除すると、解の満たす微分方程式は上記①の解析対象と非常に良く似たものになる。違いは初期値の球面積分量が追加されていることである。この積分方程式では、解の線形部分にも微分損失がないため、その時間減衰は自由な波動方程式の解のそれをより速くなる。このことによって、結果の構造は①と変わらないものの、臨界指数がそれに比べて小さくなり、特に空間４次元で２次は優臨界となって時間大域存在が得られた。つまり高次元空間では、非線形項に既知関数の特別な積分項と付け加えることによって、時間大域解になることが判明した。これは低次元空間では絶対に起こりえないことであり、解の線形部分に含まれる微分損失は解の最大存在時間に影響を与えることを示している。この結果は若狭恭平氏との共同研究であり、論文 H.Takamura and K.Wakasa, “Global existence for semilinear wave equations with the critical blow-up term in high dimensions", arXiv:1405.0120 としてまとめ、現在投稿中である。

(3) 上記目的(3)と方法(3)に対する成果は以下の通りである。変数変換後に時間微分を実行してすべての被積分関数をまとめ、解の正値性を導く十分条件を求めた結果、低次元の場合とほぼ同様な形に記述することができた。この結果は M.A.Rammaha 氏、上坂洋司氏、若狭恭平氏との共同研究で、論文“Blow-up of positive solutions to wave equations in high space dimensions”, arXiv:1408.0447 としてまとめ、Differential and Integral Equations に投稿中であったが、2015 年 6 月 19 日に掲載決定通知を受けた。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計４件）

① H.Takamura and K.Wakasa, “Almost global solutions of semilinear wave equations with the critical exponent in high dimensions", Nonlinear Analysis, TMA, vol.109, 2014, pp.187-229, 査読有
DOI:10.1016/j.na.2014.06.007

② 高村博之,「半線形波動方程式入門と最近の話題」, 第 36 回発展方程式若手セミナー報告集, 2014, pp.1-20, 査読無

③ Y.Kurokawa, H.Takamura and K.Wakasa, “The blow-up and lifespan of solutions to systems of semilinear wave equation with critical exponents in high dimensions", Differential and Integral Equations, vol.25, 2012, no.3-4, pp.363-382, 査読有

④ H.Takamura and K.Wakasa, “The final problem on the optimality of the general theory for nonlinear wave equations", Birkhäuser series, Progress in Mathematics or Trends in Mathematics, vol.301, M.Ruzhansky & M.Sugimoto & J.Wirth (eds.), “Evolution Equations of Hyperbolic and Schrödinger Type", pp.315-324, Springer Basel, 2012, 査読有

〔学会発表〕（計３２件）

1. 高村博之,「単独非線形波動方程式の一般論とその最適性最終問題」, 北海道地区数学教育協議会高校サークル３月例会, 2015 年 3 月 14 日北海道函館工業高等学校（北海道函館市）
2. 高村博之,「加藤の補題の精密化と消散波動方程式への応用」, 非線形波動方程式論研究会, 2015 年 1 月 25 日, 公立はこだて未来大学（北海道函館市）
3. 高村博之,「加藤の補題と劣臨界半線形波動方程式への応用」, 数理物理に現れる偏微分方程式研究会, 2015 年 1 月 10 日, 民宿「三五郎」(静岡県賀茂郡)
4. H.Takamura, “Classical solutions of 4D wave equations with quadratic nonlinearities”, International conference on Recent Advances in Hyperbolic Partial Differential Equations, 2014 年 12 月 4 日, 広島国際会議場（広島県広島市）
5. H.Takamura,“Analysis on ordinary differential inequalities arising from nonlinear wave equations, RIMS 研究集会「実領域における常微分方程式の安定性理論とその応用」, 2014 年 11 月 6 日, 京都大学数理解析研究所（京都府京都市）
6. H.Takamura, “Global existence for semilinear wave equations with the critical blow-up term in high dimensions”, International

Conference on Asymptotic Analysis for Nonlinear Dispersive and Wave Equations，2014 年 9 月 9 日，大阪大学（大阪府豊中市）
7. H.Takamura，“The final problem on the optimality of the general theory for nonlinear wave equations and recent topics”， Sixth Euro-Japanese Workshop on Blow-up，2014 年 9 月 2 日，東京工業大学（東京都目黒区）
8. 高村博之，「半線形波動方程式入門と最近の話題（特別講演）」，第 36 回発展方程式若手セミナー，2014 年 8 月 29～30 日，休暇村南阿蘇（熊本県阿蘇郡高森町）
9. H.Takamura，“The final problem on the optimality of the general theory for nonlinear wave equations and related topics”，SEOUL ICM 2014，Session10: Partial Differential Equations，2014 年 8 月 18 日，COEX（大韓民国京城市）
10. 高村博之，「公立はこだて未来大学における数学教育と福原賞受賞研究について」，第 90 回数学教育実践研究会 兼 第 20 回夏季セミナー，2014 年 8 月 9 日，北海道小樽桜陽高等学校（北海道小樽市）
11. H.Takamura，“Global existence for semilinear wave equations including the blow-up term in four space dimensions”， The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications，Special Session 60; New Developments in Qualitative Behavior of Evolutionary PDEs，2014 年 7 月 11 日，マドリード自治大学（スペイン共和国マドリード市）
12. 高村博之，「非線形波動方程式に対する一般論の完成とその後の発展」，2014 年度第 1 回数理科学談話会，2014 年 4 月 18 日，室蘭工業大学（北海道室蘭市）
13. 高村博之，「高次元波動方程式の正値球対称解と半線形問題への応用」，第 29 回松山キャンプ，2014 年 1 月 4 日，山口大学（山口県山口市）
14. 高村博之，「高次元非線形波動方程式の古典解の解析（特別講演）」，太宰府偏微分方程式研究集会，2013 年 10 月 13 日，九州情報大学（福岡県太宰府市）
15. M.Rammaha，高村博之，上坂洋司，若狭恭平，「Blow-up of solutions to semilinear wave equations with non-zero initial data」，2013 年日本数学会秋季総合分科会函数方程式論分科会，2013 年 9 月 27 日，愛媛大学（愛媛県松山市）
16. H.Takamura，“Global existence for semilinear wave equations with the blow-up term in high dimensions”， ISAAC 9th congress，2013 年 8 月 7 日，クラコフ教育大学（ポーランド共和国クラコフ市）
17. H.Takamura，“Positive solutions of high dimensional wave equations with non-zero data”，Workshop Nonlinear PDE，2013 年 8 月 1 日，ピサ大学（イタリア共和国ピサ市）
18. 高村博之，「空間４次元で２次の非線形項をもつ波動方程式の解析」，解析セミナー，2013 年 7 月 19 日，神戸大学（兵庫県神戸市）
19. 高村博之，「空間４次元で２次の非線形項をもつ波動方程式の解析」，波動セミナー，2013 年 6 月 20 日，北海道大学(北海道札幌市)
20. 高村博之，「空間４次元で２次の非線形項をもつ波動方程式の解析」，第 111 回神楽坂解析セミナー，2013 年 5 月 25 日，東京理科大学（東京都新宿区）
21. H.Takamura，“General theory for nonlinear wave equations and its optimality”，麗水学院科学院談話会，2013 年 4 月 9 日，麗水学院（中国浙江省麗水市）
22. 高村博之，「単独非線形波動方程式の初期値問題に対する一般論とその最適性（特別講演）」，2013 日本数学会年会函数方程式論分科会，2013 年 3 月 23 日，京都大学（京都府京都市）
23. 高村博之，若狭恭平，「空間４次元で２次の非線形項をもつ波動方程式に関する消散構造の一例」，2013 日本数学会年会函数方程式論分科会，2013 年 3 月 23 日，京都大学（京都府京都市）
24. 高村博之，「空間４次元で２次の爆発項を含む半線形波動方程式に対する時間大域解の存在」，松山解析セミナー2013，2013 年 2 月 8 日，愛媛大学（愛媛県松山市）
25. 高村博之，「空間４次元で２次の非線形波動方程式に対する消散構造の解析」，第 28 回松山キャンプ，2013 年 1 月 4 日，山口大学（山口県山口市）
26. H.Takamura，“Global existence for semilinear wave equations with the blow-up term in high dimensions”， TAIWAN-JAPAN Joint Conference on PDE and Analysis，2012 年 12 月 27 日，国立台湾大学（台湾台北市）
27. 高村博之，「非線形波動方程式の一般論の終結と共同研究者育成に関する話題」，第１回釧路解析セミナー，2012 年 10 月 30 日，北海道教育大学釧路校（北海道釧路市）
28. 高村博之，若狭恭平，「空間 4 次元で 2 次の非単項かつ不定符号の非線形項をもつ波動方程式の最大存在時間」，2012 日本数学会秋季総合分科会函数方程式論分科会，2012 年 9 月 21 日，九州大学（福岡県福岡市）

29. H.Takamura, “Almost global solutions of semilinear wave equations with the critical exponent in high dimensions”, 第 37 回偏微分方程式札幌シンポジウム, 2012 年 8 月 26 日, 北海道大学（北海道札幌市）
30. H.Takamura, “The final problem on the optimality of the general theory for nonlinear wave equations and related topics”, The 9th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Special Session 41: New Developments in Qualitative Behavior of Evolutionary PDEs, 2012 年 7 月 3 日, Hyatt Regency Grand Cypress（アメリカ合衆国フロリダ州オーランド市）
31. H.Takamura, “Almost global solutions of semilinear wave equations with the critical exponent in high dimensions”, RIMS 研究集会“幾何学的偏微分方程式に対する保存則と正則性特異性の研究”, 2012 年 6 月 14 日, 京都大学（京都府京都市）
32. 高村博之, 「高次元波動方程式の正値解と非線形一般論の最適性最終問題」, 第 542 回応用解析研究集会, 2012 年 5 月 19 日, 早稲田大学（東京都新宿区）

６．研究組織

研究代表者

高村　博之（TAKAMURA Hiroyuki）
公立はこだて未来大学・システム情報科学部・教授
研究者番号：４０２４１７８１