

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 5 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540185

研究課題名(和文)実解析的側面からのウェーブレットと変動指数解析の研究

研究課題名(英文)A real analytic study on wavelets and variable exponent analysis

研究代表者

出来 光夫(Izumi, Mitsuo)

岡山大学・教育学研究科(研究院)・講師

研究者番号：80507179

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文):研究成果の1つは変動指数を用いたBMOノルムの一般化です。澤野嘉宏氏と筒井容平氏(信州大学)との共同研究で、変動指数の仮定をHardy-Littlewoodの極大作用素の弱有界性まで弱くしても一般化が可能である事を示しました。2つ目の成果は、変動指数をもつ様々な関数空間の研究です。中井英一氏(茨城大学)と澤野氏との共同研究で、変動指数型Muckenhoupt条件を満たすウェイトをもつ変動指数Lebesgue空間をウェーブレットを用いて特徴付けました。また、野井貴弘氏(首都大学東京)との共同研究で変動指数をもつHerz、Besov、Triebel-Lizorkin空間の双対空間を明らかにしました。

研究成果の概要(英文):One of the main results is generalization of the BMO norm using variable exponent. A joint work with Yoshihiro Sawano and Yohei Tsutsui has showed the following: The generalization is possible, provided that a variable exponent guarantees the weak boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator. The second main result is concerning with the study on various function spaces with variable exponents. A joint work with Eiichi Nakai and Yoshihiro Sawano has characterized variable Lebesgue spaces with variable exponent equipped a weight satisfying the variable exponent Muckenhoupt condition. Moreover a joint work with Takahiro Noi has clarified the dual spaces of Herz, Besov and Triebel-Lizorkin spaces with variable exponents.

研究分野：実解析学

キーワード：変動指数 BMO

1. 研究開始当初の背景

これまでウェーブレット分解の圧縮問題は、指数が定数の関数空間の枠組みの中で考えられてきました。この理論を将来様々な分野で応用していくために、変動指数をもつ関数空間を含む多様な関数空間における圧縮問題の研究が求められていました。複素解析学へのウェーブレット理論の応用について、帯状領域で定義された Bergman 空間および Hardy 空間のウェーブレット係数の特徴付けは既に示されています。しかしながら、基底の構成やより一般の領域で定義された正則関数の空間については未解決となっています。指数が定数の枠組みでは把握しきれない自然現象の数学モデル化を実現するためには、変動指数を伴う偏微分方程式の研究が必要となります。解の評価のために作用素の有界性を用いるなど変動指数が現れる場合にも適用できる実解析的手法を確立しておく事が求められています。

2. 研究の目的

実解析的側面からのウェーブレット理論および変動指数解析の研究、そして関連分野への応用を目的としていました。特に、ウェーブレットによる種々の関数空間の特徴付け、ウェーブレット分解の圧縮問題、変動指数の諸性質の解明、変動指数関数空間における偏微分方程式の解析、ウェーブレット理論の複素解析への応用などに取り組む計画を立てていました。

3. 研究の方法

与えられた関数のウェーブレットを用いた有限線形結合による近似を考え、誤差を様々な関数空間のノルムを用いて測り、それぞれの関数空間において優れた近似の精度を求めます。適切な関数系を見つけ出し、それを用いて正則関数の関数空間の特徴付けおよび基底を構成します。種々の偏微分方程式に現れる作用素を変動指数関数空間において実解析的理論に基づいて解析します。

4. 研究成果

中井英一氏(茨城大学)と澤野嘉宏氏(首都大学東京)との共同研究で、変動指数型 Muckenhoupt という新しい荷重関数のクラスを調べ、ウェー

レット理論の観点から幾つかの性質を導きました。さらに、このクラスに属するウェイトをもつ重み付き変動指数 Lebesgue 空間における作用素の有界性を調べ、ウェーブレットによって特徴付けを与えました。また、この関数空間におけるウェーブレットに関連した積分型不等式の成立についても考察しています。この新たなクラスのウェイトをもつ関数空間での基底の構成および圧縮問題の研究、Lebesgue 空間以外のより複雑な関数空間の場合の議論など、まだ多くの興味深い課題が残されています。

変動指数を伴う偏微分方程式への応用を視野に入れ、変動指数を用いた BMO ノルムの一般化に取り組みました。そして、澤野嘉宏氏と筒井容平氏(信州大学)との共同研究で、変動指数の仮定を Hardy-Littlewood の極大作用素の弱有界性まで弱くしても、変動指数によって BMO ノルムと同値なノルムが与えられる事を示しました。変動指数をもつ関数空間において BMO 関数を伴う交換子積などの作用素の有界性への応用が可能となり、今後、交換子積に関連した偏微分方程式の解の評価へ繋げる事が実現できます。

荷重を伴わない変動指数関数空間において、これまでに知られている結果の改良、総括に取り組みました。中井英一氏と澤野嘉宏氏との共同研究により、 $\log\text{-}H^{\infty}$ older 条件のもとでの変動指数 Lebesgue 空間における Hardy-Littlewood の極大作用素の有界性の自己完結した新しい証明を与えました。さらに、変動指数解析の理論で一般的な仮定とされている $\log\text{-}H^{\infty}$ older 条件がどれだけ緩和できるか、変動指数解析という新しい理論と古くから知られている Muckenhoupt の理論との関連性についても考察しました。そして、変動指数解析の基礎から最新の研究成果までをまとめた大著 (Scientiae Mathematicae Japonicae, 2014) を出版する事ができました。

過去に私が積分の指数のみを定数から変動指数へ置き換えて一般化させた変動指数 Herz 空間について、野井貴弘氏(首都大学東京)とともに研究を進めました。まず、Herz 空間のもつ3つの指数全てを変動指数に置き換えた新たな変動指数 Herz 空間を定義しました。そして、各変動指数に適切な条件を仮定したもとで、変動指数 Herz 空間の双対空間を明らかにしました。同様の議論を全て

の指数が変動する変動指数 Besov 空間 および 変動指数 Triebel-Lizorkin 空間にも当てはめ、これらの空間の双対空間についても同様に求めました。双対空間の決定は、それ自身が実解析における興味深い話題です。しかしながら、ウェーブレットによる関数空間の特徴付けの際にも、双対性を伴う議論は頻繁に用いられています。これら3つの関数空間に限らず、様々な変動指数をもつ関数空間の双対性を明らかにしておけば、今後の変動指数解析の研究を効率良く進めていく事が可能となります。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計9件) 全て査読有り。

Mitsuo Izuki, Eiichi Nakai and Yoshihiro Sawano, Function spaces with variable exponents-an introduction-, *Scientiae Mathematicae Japonicae* 77 (2014), 187-315.

Mitsuo Izuki and Takahiro Noi, Duality of Besov, Triebel-Lizorkin and Herz spaces with variable exponents, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (2) 63 (2014), 221-245.

Mitsuo Izuki, Yoshihiro Sawano and Yohei Tsutsui, Variable Lebesgue norm estimates for BMO functions. II, *Analysis Mathematica* 40 (2014), 215-230.

Mitsuo Izuki and Yoshihiro Sawano, A criterion of sampling theorems on Banach function spaces, *Tokyo Journal of Mathematics* 36(2013), 131-145.

Mitsuo Izuki, Remarks on Muckenhoupt weights with variable exponent, *Journal of Analysis and Applications* 11 (2013), 27-42.

Mitsuo Izuki, Eiichi Nakai and Yoshihiro Sawano, The Hardy-Littlewood maximal operator on Lebesgue spaces with variable exponent, *RIMS Kokyuroku Bessatsu B42* (2013), 51-94.

Mitsuo Izuki, Eiichi Nakai and Yoshihiro Sawano, Hardy spaces with variable exponent, *RIMS Kokyuroku Bessatsu B42*

(2013), 109-136.

Mitsuo Izuki and Yoshihiro Sawano, Atomic decomposition for weighted Besov and Triebel-Lizorkin spaces, *Mathematische Nachrichten* 285 (2012), 103-126.

Mitsuo Izuki, The compactly supported wavelet characterization of non-homogeneous Herz-Sobolev spaces with variable exponent, *Analysis Mathematica* 38 (2012), 19-40.

Mitsuo Izuki and Yoshihiro Sawano, Variable Lebesgue norm estimates for BMO functions, *Czechoslovak Mathematical Journal* 62 (137)(2012), 717-727.

[学会発表](計1件)

出末光夫、「変動指数をもつ種々の関数空間の実解析的研究 (A real analytic study of various function spaces with variable exponent)」, 日本数学会, 学習院大学, 平成26年3月17日。

[図書](計0件)

[産業財産権]
出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織
研究代表者
出末 光夫 (MITSUO IZUKI)
研究者番号: 80507179

(2)研究分担者

()

研究者番号：

(3)連携研究者
()

研究者番号：