様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 １ 日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４０１９２

研究課題名（和文）拡散過程を用いた有理形関数の値分布に関する研究

研究課題名（英文）Value distribution theory of meromorphic functions based on diffusion processes

研究代表者
厚地　淳（ATSUJI, Atsushi）

慶應義塾大学・経済学部・教授

研究者番号：００２２１０４４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の代表者は従来より確率論的方法を用いて有理形関数・正則写像の値の分布を研究してきた。その中で拡散過程を用いたネヴァンリンナ理論を見出したが、それを本研究ではより広範で新しい対象に適用し研究を試みた。その一つとして複素葉層構造を持つ多様体上の正則写像の研究を行った。葉層構造は数学の色々な場面で現れ盛んに研究され重要性を増しているが、確率論的研究方法が有望視されている。本研究では、確率論的方法を用いて葉層構造に付随した有理形関数のピカール型定理などを得た。

研究成果の概要（英文）：We continuously investigate the theory of value distribution of holomorphic maps using probabilistic technique. We found Nevanlinna theory based on diffusion processes in our previous works and we have developed it. In this project we try to apply our theory to new and wider objects than our previous research. Our main object is the value distribution of holomorphic maps on complex foliated spaces. We obtained some results on value distribution of these maps, for instance, we showed a Picard type theorem of meromorphic functions associated with complex foliation structure.

研究分野： 数学

キーワード： 複素解析　拡散過程　正則写像　値分布論　ネヴァンリンナ理論　複素葉層構造

１．研究開始当初の背景

従来より筆者は、確率論的方法を用いて幾何学的関数論、特に、有理形関数の値分布と劣調和関数の性質について研究してきた。ケーラー計量が与えられると、これに対応する複素ブラウン運動が存在するが、これを基礎とした確率論的手法を用いることにより、一般のケーラー多様体上の有理形関数(１次元複素射影空間への正則写像のことを本課題ではこのように呼ぶ)に対して古典的なネヴァンリンナの理論の類似が成立することを示した。また、同様な手法を用いて複素ユークリッド空間内の部分多様体上の有理形関数に対してもネヴァンリンナの定理が成立することを示し、より詳しい除外点の個数の評価を得た。さらに、筆者は 2010 年に出版された論文において、ブラウン運動の推移作用素である熱拡散作用素を用いて、ネヴァンリンナ理論のより簡明な定式化を行い、これを用いてブラウン運動が再帰的であるようなケーラー多様体上の有理形関数の除外点の個数について詳しい評価式を得た。以上の研究は、ケーラー多様体上のブラウン運動に基づく設定であるのだが、上述の研究内容は、いくつかの修正により種々の拡散過程に対しても設定可能であると考えるにいたった。なお、一般的な定義域における有理形関数の値分布については、W.Stoll の研究(1977,1985)以来ほとんど知られていない。また、Stoll の研究は、放物的多様体上の正則写像に対して一般的な枠組みを与えたもので、有理形関数の除外値の具体的な個数評価などは与えられていない。

２．研究の目的

本研究課題では、この着想に基づき、下記の問題に対して前述の研究のアイディアを拡張することにより有理形関数の値分布を研究する。特に、複素葉層構造を持つ多様体上の有理形関数の値分布に関する研究を行う。葉層構造を持つ多様体で各葉がケーラー多様体の構造を持つものを考える。この多様体上で、各葉上では非定数有理形関数になっているボレル可測関数の値分布を考える。このような関数の値分布は葉層構造によって何らかの制約を受けると考えられる。このような問題に関する研究は、Feres と Zeghib の研究(2003 年)が知られている。彼らは、正則葉層構造を持つコンパクトな多様体を考え、対象とする関数として各葉上で正則である連続関数を考えている。すなわちこれらの関数は各葉上では有界な正則関数である。このような関数が定数以外存在しない条件(Liouville 型定理)を種々の場合について考察している。対象とする関数の条件を弱め、より詳しい除外点の様子(除外点の個数の評価)を考察することは自然なことと思われる。また、有理形関数の値分布を研究している立場からすると、有理形関数の値分布が葉層構造によってどのような制約を受けるかは興味深く、研究する価値のある新しい問題である。一方、1983 年 L.Garnett は、葉層構造を持つ多様体で各葉がリーマン多様体の構造を持つものに対して、「調和測度」の概念を導入し、また、これを不変測度に持つような拡散作用素を導入した。これを用いてエルゴード定理を証明した。この調和測度を用いることにより、葉層構造の統計的性質を論ずることが可能となった。その後、E.Ghys, Martinez,Candel らによってこの手法は有効に用いられ、葉層構造に関する多くの結果が証明されている。

この拡散作用素に筆者が導入した熱拡散作用素を用いたネヴァンリンナ理論を適合させることによって、有理形関数の値分布の研究に応用できるのでないかと考えられる。

また、複素多様体の非有界領域における劣調和関数の性質、有理形関数の値分布に関する研究も行いたい。 前述の筆者による熱拡散作用素を用いたネヴァンリンナ理論は、ブラウン運動の保存性(有界な初期値に対する熱方程式の解の一意性)が重要な役割を果たす。一般に、ユークリッド空間内の容量正の境界を持つような領域では、ブラウン運動は有限時間で境界に達する確率が正であるので保存的でない。よってユークリッド空間上のブラウン運動をそのまま用いることはできない。そこで、領域に固有な保存的な拡散過程を作り、これに対してわれわれの従来の結果を拡張し応用するというアイディアが生まれる。本研究は、いくつかの状況下で適当な拡散過程が保存性を持つ条件を明らかにして有理形関数の除外値の個数評価を行おうというものである。同時に、我々の手法は、リーマン多様体上のブラウン運動の設定では劣調和関数の L1-Liouville 型定理に応用可能である。この手法を時間変更によって作られた拡散過程に拡張すると劣調和関数の非可積分性に関する定理が得られると期待できる。

３．研究の方法

次のような各場合において有理形関数の除外点の個数評価など値分布の研究を行う段階的な目標を設定し、研究を行った。

(1) 葉層構造を持つ多様体がコンパクトで、各葉は滑らかなケーラー多様体であり、ケーラー計量およびそのすべての微分が多様体全体では連続である場合。

(2) (1)の場合を拡張し、ケーラー計量およびそのすべての微分が多様体全体ではボレル可測である場合。

(3) (2) を拡張し、各葉が特異点を持ちうる場合。

(1) の場合だけでも有理形関数の除外値の個数評価が得られれば、現在まで知られていない結果であると考えられるが、複素解析学的には多くの例において各葉は特異点を持ちうるので、(3)まで拡張できれば、より満足いくものとなる。Garnett らの考察は、(1)

の場合のような各葉が滑らかな多様体である場合に立脚しているので、(2)、(3) においては Garnett の導入した拡散作用素を拡張する必要がある。ここに確率論的手法が有効に作用する。さらに、難しい問題ではあるが

(4) (3) を拡張し、葉層構造を持つ多様体が非コンパクトである場合についても考えたい。この場合は調和測度の存在の問題があるので難しいが、いくつかの特別な場合については考察可能である。

なお、複素葉層構造を持つ多様体については複素解析学的立場から、Fornaess、Sibony らの現在進行中の一連の研究がある。彼らは調和カレントの概念を導入し、特異点を持つ場合などについて葉層構造の持つ性質を考察している。ただし、各葉がリーマン面である場合に限られる。研究開始当初は、彼らの研究が直ちに有理形関数の値分布の話題につながるかどうかはわからなかったが、われわれの研究との接点を考察していくうちに後述するようにうまく結びついているように思われる。

４．研究成果

以下、研究方法の項で述べた段階的考察によって得られた成果を述べる。以下では、次のような概念・用語を用いる。複素葉層構造を持つ空間とは、可分距離付け可能な局所コンパクト空間ですべて同じ次元の複素多様体の非交和になっているものを言う。これらの空間を構成する複素多様体を葉と呼ぶ。葉向正則写像(leafwise holomorphic map)とは、複素葉層構造を持つ空間からある複素多様体へのボレル可測写像で各葉に沿っては正則写像になっているものとする。我々の研究では、葉向正則写像の値域は複素射影空間の場合を主に考える。本報告では、特に断らない限り値域は複素射影空間とする。また、1 次元複素射影空間への葉向正則写像を葉向有理形関数と呼ぶことにする。

各葉がケーラー多様体の場合、葉に沿ったラプラス・ベルトラミ作用素があるが、これを生成作用素とする拡散過程として各葉上にブラウン運動が定義される。この確率過程の推移作用素に対する不変測度として前述した L.Garnett の意味の調和測度が定義される。以下では、単に調和測度と呼ぶ。これが確率測度になるとき、調和確率測度と呼ぶ。調和確率測度 1 の集合があり、この集合と交わるすべての葉に対して ある性質が成立するとき、その性質は『ほとんどすべての葉に対して成立する』ということにする。非定数葉向正則写像とは、ほとんどすべての葉に沿って非定数の葉向正則写像のこととする。

(1)複素葉層構造を持つコンパクトな空間上のカソラッティ‐ワイエルストラス型定理：考えている空間はコンパクトであるので、調和確率測度が存在する。この時、次が成立することが最初にわかった。

定理 1．非定数葉向正則写像は射影容量が零の集合を除外しない。

ここで、射影容量とは、Molzon によって導入された複素射影空間上の容量で、1 次元の場合は対数容量に等しい。この結果では、コンパクト性は調和確率測度の存在のみにつかわれるので、空間がコンパクトでなくとも、調和確率測度が存在すれば同様な結論が導かれる。

(2) 調和カレントと対応する葉向正則拡散過程：前述したように調和測度はリーマン多様体のカテゴリーでとらえられるが、この複素解析的対応物として、調和カレントがあげられる。調和カレントと葉に沿ったケーラー計量による体積要素との外積は調和測度を与えることが知られている。Fornaess-Sibony, Berndtsson-Sibony らの研究により、いくつかの条件のもとで調和カレントの存在が知られている。

我々は、この調和カレントに対応する葉向正則拡散過程が存在することを示した。ここで、葉向正則拡散過程とは、複素葉層構造を持つ空間上の拡散過程で、ほとんどすべての葉に対して、各葉に制限するとその分布が前述した各葉上に定義されるケーラー計量に対応したブラウン運動の分布と一致するものである。複素葉層構造が葉向ケーラー多様体の構造を持つとは、各葉は完備ケーラー計量を持ち、ケーラー計量およびそのすべての微分が多様体全体ではボレル可測である時を言う。

定理 2．調和カレントが存在し、各葉は葉向ケーラー多様体の構造を持ち、ケーラー計量とその逆は局所有界であるとする。このケーラー計量から定義されるリッチ曲率が下に有界ならば、調和カレントから定義される調和測度を不変測度に持つような葉向正則拡散過程が存在する。

この拡散過程の構成は、ディリクレ形式の理論による。

(3) 双曲的リーマン面を葉にもつ(特異点を許す)複素葉層構造の場合:

(2)で得られた拡散過程を用いて、葉向正則写像の研究を行った。次の様な状況を考える。特異点を許す複素葉層構造を持つ空間は、あるコンパクト複素多様体のコンパクト部分集合とする。特異点は、この多様体の閉集合であり、特異点を許す葉層構造を持つコンパクトな空間からこれを除いた空間は非特異な複素葉層構造を持つ空間である。これは一般には非コンパクトである。各葉は双曲的リーマン面とする。すでに知られていたことだが、このような場合、特異点が線形化可能ならば、調和カレントが存在し、対応する調和測度は有限測度(すなわち、正規化して確率測度)となることがわかる。この時、定理 2

は成立し、葉向正則写像の値分布について次がわかった。調和確率測度がエルゴード的とは、任意の不変集合の測度は 0 または 1 である時を言う。葉向正則写像のエネルギーを値域の射影空間のフビニ-スタディ計量の引き戻しと調和カレントとの外積で定義する。
定理 3．以上の設定の下、N 次元複素射影空間への非定数葉向正則写像を考える。エルゴード的な調和確率測度が存在するならば、この測度に関して次が成り立つ。ほとんどすべての葉に沿って、この写像は退化しているか、または、この写像の像は、高々有限個を除いてすべての一般の位置にある超平面と交わる。また、この写像のエネルギーが N に対して十分大きければ、除外できる一般の位置の超平面は 高々 N+1 枚である。

(4) (3)の高次元化とピカール型定理：(3)では葉が 1 次元の場合を考えたが、これを一般次元の完備ケーラー多様体の時に考える。双曲的リーマン面の場合は自然にポアンカレ計量から誘導される計量を考えることができた。これは曲率 -1 の完備な計量である。これに対し、次のように拡張した。
定理 4．調和確率測度が存在するとする。また、各葉は葉向ケーラー多様体の構造を持ち、この計量による曲率が、断面曲率は 0 以下、リッチ曲率は下に有界とする。この時、非定数葉向有理形関数は、ほとんどすべての葉に沿って高々有限個の点しか除外できない。調和測度がエルゴード的で、葉向有理形関数のエネルギーがリッチ曲率の下限より十分大きければ、非定数葉向有理形関数は、ほとんどすべての葉に沿って高々2 点しか除外できない。
(3)の時は値域も高次元であったが、定義域の葉を高次元化したために、技術的な理由からであるが、現在のところ有理形関数の結果になっている。
この方向での研究の残された大きな課題としては、大きな特異点を許す非コンパクトな場合の考察がある。このような葉層構造と幾何学的関数論の研究は、正則写像の統計的性質の研究という大きな問題に発展すると考えられるので、続けて考えていきたい。

(5) 複素多様体上の拡散過程の保存性と関連する関数論的性質の研究：前述した複素葉層構造に対応した調和測度の存在と葉上の拡散過程の保存性の関係がわかり、調和測度の存在に関する部分的結果と従来の結果の別証明を与えた。また、ケーラー多様体やリーマン多様体上のブラウン運動が保存的になる場合を考察し、劣調和関数とその可積分性についての結果を得た。これは、従来の良く知られた P.Li の結果等を含むものである。

以上の結果は、国内・外の研究集会等で発表され、(1)-(4) に関しては、2 編の論文としてまとめ、現在学術誌に投稿中である。
(5)に関しては現在論文を準備中である。

5．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　1　件）

① <u>厚地 淳</u>, 幾何学的関数論と拡散過程が関連する話題から : 複素葉層構造を中心に,京都大学数理解析研究所講究録、査読なし、 No.1855, 2013, pp.47-55
http://hdl.handle.net/2433/195232

〔学会発表〕（計　7　件）

① <u>厚 地 淳</u> ,Dirichlet forms and diffusions on complex laminations, 複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺, 2014 年 12 月 12 日, 京都教育大藤森キャンパス(京都府・京都市)
② <u>Atsushi Atsuji</u>, Diffusions and function theoretic properties of complex laminations, EastMidlands Stochastic Analysis Seminar, Univ. Warwick, 2014 年 8 月 28 日, コヴェントリー市(英国)
③ <u>厚地 淳</u>,有理型関数の値分布と拡散過程, RIMS 研究集会「確率解析」, 2014 年 03 月 19 日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)
④ <u>厚 地 淳</u> ,Value distribution of leafwise holomorphic maps, 2013 年度多変数関数論冬セミナー, 2013 年 12 月 22 日, コラッセふくしま(福島県・福島市)
⑤ <u>厚 地 淳</u>, A defect relation for leafwise holomorphic maps, 第 4 回東北複素解析セミナー, 2013 年 10 月 9 日, 東北大学情報科学研究科(宮城県・仙台市)
⑥ <u>厚地 淳</u>, Value distribution of leaves of complex foliations in complex projective spaces,「複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺」2013 年 6 月 8 日,龍谷大学深草キャンパス(京都府・京都市)
⑦ <u>厚地 淳</u>, 幾何学的関数論と拡散過程が関連する話題から－複素葉層構造を中心に－, 確率論シンポジウム, 2012 年 12 月 18 日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)

6．研究組織
(1)研究代表者

厚地 淳　　（ATSUJI, Atsushi　　）
慶應義塾大学・経済学部・教授
研究者番号：00221044

(2)研究分担者

（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
田村　要造（TAMURA, Yozo　）
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：　50171905

相原　義弘（AIHARA, Yoshohiro)
福島大学・人間発達文化学類・教授
研究者番号： 60175718