様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月　 ２ 日現在

機関番号：１４５０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2016
課題番号：２４５４０２００

研究課題名（和文）４階放物型偏微分方程式として表される曲面の発展方程式の研究

研究課題名（英文）On the geometric evolution equations described by the 4th order parabolic partial differential equations

研究代表者
高坂　良史（Kohsaka, Yoshihito）

神戸大学・海事科学研究科・准教授

研究者番号：００３６０９６７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　4,000,000円

研究成果の概要（和文）：　4階放物型偏微分方程式で表される曲面の発展方程式について研究し、特に表面拡散方程式と呼ばれる方程式に対し定常曲面の安定性の解析を行った。表面拡散方程式は、この方程式によって運動が支配される曲面が囲む領域の体積を保ちながらその曲面の表面積を減少させるという性質をもつため、定常曲面は平均曲率一定曲面と呼ばれる曲面になる。本研究では、定常曲面が軸対称な平均曲率一定曲面の場合について、安定性の判定条件を導出した。

研究成果の概要（英文）：The geometric evolution equations described by the 4th order parabolic partial differential equations are studied. In particular, we focus on the surface diffusion equation and analyze the stability of the steady states for it. The surface diffusion equation has a variational structure that the area of the moving surface governed by this equation decreases whereas the volume of the region enclosed by its surface is preserved. This implies that the steady states are the constant mean curvature surfaces. In this project, we consider the axisymmetric constant mean curvature surfaces to be as the steady states for the surface diffusion equation and derive the criteria of the stability for them.

研究分野：曲面の発展方程式

キーワード：表面拡散方程式　ドロネー曲面　楕円積分

１．研究開始当初の背景

空間を隔てる曲面のダイナミクスを記述する方程式を曲面の発展方程式という。曲面の発展方程式の一つの例として平均曲率流が挙げられる。平均曲率流は、曲面を何らかの補助関数で表した場合、その関数を未知関数とする 2 階非線形放物型偏微分方程式として表記される。平均曲率流に関しては多くの研究結果があるが、平均曲率流による曲面の挙動に関する結果として、初期曲面が凸閉曲面であれば時間発展する曲面も凸のまま１点に縮むことが知られている。一方、初期曲面がダンベル形の曲面の場合は、点に縮む前に特異点が生じる。このとき、曲面が点に縮むまでの解析を行いたければ特異点発生前後の解析が必要になるが、平均曲率流に関しては等高面の方法と粘性解理論を利用した弱解による解析やリッチフローの解析方法を応用した手術つき平均曲率流による解析などによってその解析が行われている。

本研究では、曲面を何らかの補助関数で表した場合に、その関数に対する 4 階非線形放物型偏微分方程式として表記される曲面の発展方程式である表面拡散方程式及びヘルフリッチ流方程式を研究対象とするが、これらの方程式による曲面の挙動を考えたときでも特異点が生じる場合がある。表面拡散方程式に関しては、Bernoff-Bertozzi-Witelskin による 1998 年の論文(以下、[BBW]と記述する)において、軸対称な曲面に関して曲面の自己相似的ピンチオフの研究が行われている。[BBW]ではその解析を定常解の線形安定性の解析とそれをもとにした分岐解析及び数値解析を用いて行っているが、自己相似解の解析について非線形問題としての理論的な解析は行われていない。また、Mayer による 2001 年の論文(以下、[M]と記述する)において、表面拡散方程式による挙動でピンチオフが生じる曲面の例がいくつか数値解析をもとに紹介されているが、理論的な解析は行われていない。

一方、ヘルフリッチ流方程式に関しては、その特別な場合であるウィルモア流方程式に対して、有限時刻で曲面に特異点が生じる初期曲面の例が Mayer-Simonett による 2002 年の論文(以下、 [MS]と記述する)で数値解析をもとに紹介され、その理論的な解析が Blatt による 2009 年の論文(以下、[B]と記述する)で行われている。しかし[B]ではそれが有限時刻に起こり得るかまでは示されていない。

また、表面拡散方程式とヘルフリッチ流方程式による曲面の挙動の違いを表す一つの例として、初期曲面がダンベル形の場合の曲面の挙動が挙げられる。表面拡散方程式に対してはある種のダンベル形を初期曲面にもつ動曲面にはピンチオフが生じることが[M]による数値解析で示唆されているが、ヘルフリッチ流の特別な場合であるウィルモア流方程式に対しては、動曲面は球面に向かうことが[MS]による数値解析で示唆されている。

このような研究背景のもと、以下を研究目的として研究を行った。

２．研究の目的

本研究では、4 階非線形放物型偏微分方程式として表される曲面の発展方程式である表面拡散方程式及びヘルフリッチ流方程式を研究対象とし、これらの曲面の発展方程式による曲面のダイナミクスを解析することを目的とする。またその解析を通して、新たな解析手法の構築を試みる。

３．研究の方法

以下の手順で研究を実施する。

(1) 二つの軸対称な曲面にはさまれ、それらの曲面と交わっている軸対称な曲面の表面拡散方程式による挙動を考える。境界条件として変分学的に自然な境界条件を課す。まず、軸対称という仮定の下で、表面拡散方程式の定常曲面の安定性の解析及び分岐解析を行う。その結果をもとに時間発展の過程で曲面に特異点が生じるような初期曲面を構成する。さらに曲面が軸対称な場合の表面拡散方程式に対して後ろ向き自己相似解に関するスケール変換を行い、得られた 4 階非線形放物型偏微分方程式の解析を行うことで、特異点が生じるまでの曲面のダイナミクスを明らかにする。

(2)変分学的に自然な境界条件を満たす軸対称な曲面でヘルフリッチ流方程式の定常解となる曲面の安定性の解析及び分岐解析を行う。得られた結果を表面拡散方程式に対する結果と比較し、表面拡散方程式とヘルフリッチ流方程式による曲面のダイナミクスの構造的な違いを明らかにする。

４．研究成果

研究期間を通して、主に表面拡散方程式の定常曲面の安定性に関して研究を行った。表面拡散方程式は、この方程式によって運動が支配される曲面に囲まれた領域の体積を一定に保ちながらその曲面の表面積を減少させるという変分構造をもつため、定常曲面は平均曲率一定曲面となることが予想される。実際、外部領域との交わりにおいて変分学的に自然な境界条件を課した場合、定常曲面として平均曲率一定曲面が得られる。そこで、この変分学的に自然な境界条件を満たす軸対称な平均曲面一定曲面の安定性について解析を行った。軸対称な平均曲率一定曲面はドロネー曲面と呼ばれ、カテノイド、円柱、アンデュロイド、(連鎖)球面、ノドイド(カテノイドのみ平均曲率の値が 0 で、他の四つの曲面の平均曲率は 0 ではない)の五種類に分類されることが知られている。表面拡散方程式の定常曲面としてのドロネー曲面の安定性の解析を行うため、まずはドロネー曲面をパラメータ表示し、その表示をもとに表面拡散方程式をドロネー曲面のまわりで軸対

称な摂動に関して線形化した。その際、ドロネー曲面のパラメータ表示として剱持の表現公式を利用した。線形化方程式は4階線形放物型偏微分方程式の初期値・境界値問題となるが、それに対応する固有値問題を導き、固有値がすべて実数となることを示し、固有値の符号の判定を行った。ここで、すべての固有値が負であれば対応するドロネー曲面は軸対称な摂動に対して線形安定であり、正の固有値が存在すれば対応するドロネー曲面は不安定である。固有値の符号の判定を行うため、固有値の変分的な特徴付けを行い、まずは以下を示した。

(1) ドロネー曲面の平均曲率を$-H(>0)$、平均曲率が0ではないドロネー曲面を分類するパラメータをB、ドロネー曲面の生成曲線の長さをd、その生成曲線の平行移動のパラメータをp、ドロネー曲面と二つの軸対称な外部曲面との交わりにおける外部曲面の曲率をK_-、K_+とするとき、固有値はこれらのパラメータに連続的に依存し、K_-、K_+に関しては単調減少である。
(2) $d(>0)$が十分小さく、かつK_-、K_+が十分大きいとき、固有値はすべて0以下である。

(注) 上記の(1)で導入したパラメータBとドロネー曲面の形状との関係は以下のようになる。

$B=0$　：円柱
$0<B<1$：アンデュロイド
$B=1$　：(連鎖)球面
$B>1$　：ノドイド

この結果、0が固有値となるパラメータの条件が導出できれば、それが安定性の判定条件となるため、0-固有値問題の解析を行った。0-固有値問題は変数係数4階同次線形常微分方程式の境界値問題となるが、表面拡散方程式の変分構造が線形化方程式にも引き継がれることから、本質的には積分平均0という条件を満たす未知関数に対する、非同次項が定数である変数係数2階線形非同次常微分方程式の境界値問題を解けばよいことが解析の過程で明らかになった。そこで、同次方程式の一つの解を幾何学的な考察から見つけ、定数変化法を適用することで同次方程式のもう一つの解と非同次方程式の特殊解を得た。その結果、変数係数4階同次線形常微分方程式に境界条件の一部を課した問題の解は、定常曲面がカテノイドの場合は対数関数、カテノイド以外のドロネー曲面の場合は第1種と第2種の完全及び不完全楕円積分を含んだ式で表記されることを明らかにした。これらの解を残りの境界条件と積分平均0という条件に代入し、0が固有値となるためにパラメータが満たすべき条件を導出した。その条件が安定性の判定条件となるが、それを(K_-,K_+)座標平面で図示すると図1〜4のようになる。パラメータ(K_-,K_+)が図1または図2の灰色の領域に含まれるとき、固有値はすべて負となる。つまり、ドロネー曲面は軸対称な摂動に対して安定となる。一方、(K_-,K_+)が図1〜4の白色の領域に含まれるときは、正の固有値が少なくとも一つ存在し、ドロネー曲面は不安定となる。図1〜4で描画されている曲線は双曲線であるが、灰色の領域と白色の領域を分ける曲線が安定性の判定条件を表す曲線になる(以後、その判定曲線をCと記述する)。この判定曲線Cがどのような位置に描かれるかはパラメータ(H,B,d,p)に依存する。つまり、ドロネー曲面の形状に依存する。ドロネー曲面が円柱とアンデュロイドである場合は、図の灰色の部分はdが増加するごとに右上に移動し(図1、2を参照)、dがあるd_*を越えると灰色の部分は存在しなくなる(図3、4を参照)。すなわち、$d\geqq d_*$では、(K_-,K_+)をどのようにとっても円柱またはアンデュロイドを安定にできない。d_*の値もドロネー曲面の形状に依存し、円柱の場合は三角関数を含んだ超越方程式、アンデュロイドの場合は楕円積分を含んだ超越方程式を解析することにより、以下を得ることができた。

円柱の場合：$d_*=\pi/H$
アンデュロイドの場合：
　$p=\pi/(4H)$かつ$0<B<1$：$d_*=\pi/H$
　$p=-\pi/(4H)$かつ$0<B<B_c$：$d_*=\pi/H$
　$p=-\pi/(4H)$かつ$B_c<B<1$：$\pi/(2H)<d_*<\pi/H$

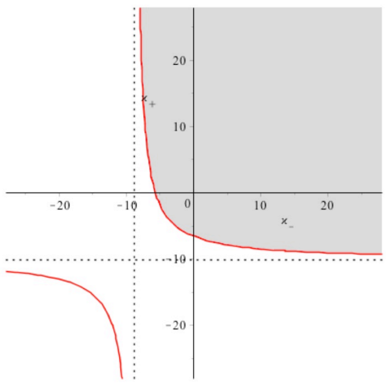

図1　$d=d_1<d_*$

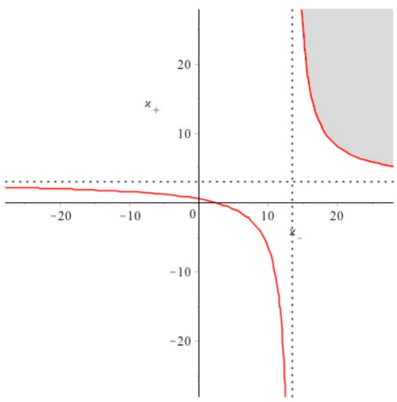

図2　$d_1<d=d_2<d_*$

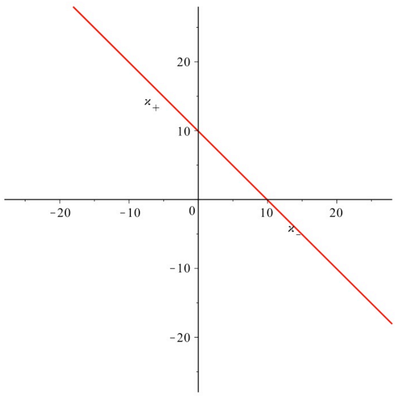

図 3 d=d_*

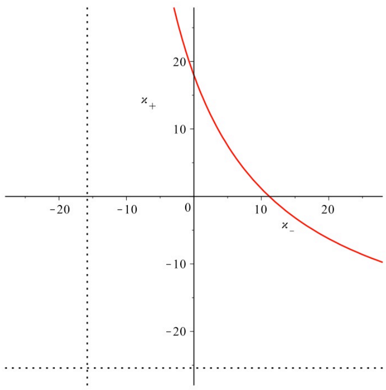

図 4 d_*<d=d_3

また、上記の円柱とアンデュロイドに対する安定性の判定結果をもとに、外部曲面を平面とし、ドロネー曲面がその平面に直交する場合について、以下の分岐曲線を得た。この図において、横軸のパラメータはドロネー曲面と外部曲面が囲む領域の体積、縦軸のパラメータは形状を分類するパラメータ B である。図では 3/2 周期までのアンデュロイドを考えている。

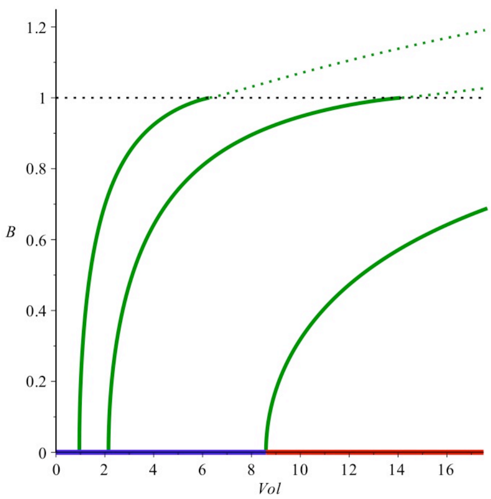

図 5 分岐曲線

図において、赤の線が安定な円柱の枝、青の線が不安定な円柱の枝である。緑の線(枝)はアンデュロイドを表し、すべて不安定である。アンデュロイドの枝は、円柱のまわりでの線形化問題に対応する固有値問題の固有値が 0 となる体積値 $d^3/(n^2\pi)$のときに現われ、n=1、2、3 のときがそれぞれ 1/2、1、3/2 周期のアンデュロイドに対応する。

これまでドロネー曲面の各パラメータと表面拡散方程式に対する定常曲面としてのドロネー曲面の安定性の関係をここまで詳細に調べた結果はなく、また、表面拡散方程式は 4 階非線形放物型偏微分方程式として表され 2 階非線形放物型偏微分方程式として表される平均曲率流に比べて解析手法が十分に確立されていないことから、本研究の結果は表面拡散方程式による曲面のダイナミクスを解析する上で有用であると思われる。特に、本研究期間では曲面のダイナミクスの解析まで研究を進めることができなかったが、時間発展の過程で曲面に特異点が生じるような初期曲面の構成への応用が期待できる。

また、本研究期間では研究方法の(2)で述べたヘルフリッチ流方程式に対する定常曲面の安定性の解析及び分岐解析までは研究を進めることができなかったが、本研究の過程で得た楕円積分の解析結果は、ヘルフリッチ流方程式の解析においても有効であると考えられる。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 4 件）

① Y. Kohsaka,
Stability Analysis of Delaunay Surfaces as Steady States for the Surface Diffusion Equation,
Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 査読あり, Vol. 176, 2016, pp. 121-148.

② 高坂 良史,
表面拡散方程式と平均曲率一定曲面,
数理解析研究所講究録, 査読なし,
Vol. 1979, 2015, pp. 37-88.

③ Y.-Y. Chen, Y. Kohsaka, H. Ninomiya,
Traveling spots and traveling fingers in singular limit problems of reaction diffusion systems,
Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B, 査読あり, Vol. 19, 2014, pp. 697-714.
DOI: 10.3934/dcdsb.2014.19.697

④ D. Depner, H. Garcke, Y. Kohsaka,
Mean curvature flow with triple junctions in higher space dimensions,
Archive for Rational Mechanics and Analysis, 査読あり, Vol. 211, 2014, pp. 301-334.

DOI: 10.1007/s00205-013-0668-y

〔学会発表〕（計 26 件）
① Y. Kohsaka,
On the bifurcation diagrams for steady states of the surface diffusion equation,
International Conference on PDEs, Geometric Analysis and Functional Inequalities,
2017 年 3 月 9 日,
Sydney (Australia)
② 高坂 良史,
Bifurcation analysis for steady states of surface diffusion equation,
Elucidation of configurational structure in micro behavior and collective pattern formation,
2016 年 9 月 14 日,
京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)
③ Y. Kohsaka,
Stability of Delaunay surfaces as the steady states for the surface diffusion equation,
Geometric aspects on capillary problems and related topics,
2015 年 12 月 17 日,
Granada (Spain)
④ 高坂 良史,
On the criteria for the stability of unduloids,
保存則をもつ偏微分方程式に対する 解の正則性・特異性の研究,
2015 年 6 月 5 日,
京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)
⑤ 高坂 良史,
Stability analysis of stationary surfaces for surface diffusion equation,
第 32 回九州における偏微分方程式研究集会,
2015 年 1 月 30 日,
九州大学西新プラザ(福岡県・福岡市)
⑥ 高坂 良史,
表面拡散方程式による平均曲率一定曲面の安定性解析,
微分方程式の総合的研究,
2013 年 12 月 22 日,
東京大学(東京都・目黒区)
⑦ Y. Kohsaka,
On an interfacial motion by surface Diffusion,
SIAM Conference on Mathematical Aspects of Materials Science,
2013 年 6 月 12 日,
Philadelphia (USA)

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
高坂 良史（KOHSAKA, Yoshihito）
神戸大学・大学院海事科学研究科・准教授
研究者番号：00360967

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：

(4)研究協力者
（　　）