様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １８ 日現在

機関番号：１２６１４
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2015
課題番号：２４５４０２０７

研究課題名（和文）空間非一様な反応拡散方程式系がうみだす遷移層の解析

研究課題名（英文）Analyses on layers arising in spatially inhomogeneous reaction diffusion equation

研究代表者
中島　主恵（Nakashima, Kimie）

東京海洋大学・その他部局等・准教授

研究者番号：１０３１８８００

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円

研究成果の概要（和文）：空間非一様な反応拡散方程式であらわされる遺伝子頻度のモデルを１次元の有界区間上,拡散係数微小の状況下で扱い，多数の遷移層をもつ定常解を構成した．この定常解は線型安定であり，このほかに定常解が存在するならば，その定常解は常に自明解０の近くに値をとる．さらに空間非一様性に関するある条件下のもとこの遷移層をもつ定常解は一意の定常解となることを証明することに成功した．
　さらに積分項付きの空間非一様な反応拡散方程式の研究した．上記の遺伝子モデルにパンミクシーの効果(積分項)を加えたモデル方程式を考え，定常解を構成することに成功した．

研究成果の概要（英文）：We study a migration selction model for the solution of gene frequency, which is described by a spatially inhomogeneous reaction diffusion equation. We deal with this equation in one dimensional interval and assume that the diffusion coefficient is very small. We have constructed a steady state with many layers. This steady state is linearly stable. If there is any other nontrivial steady state `u'except for this layered steady-state, u stays close to a solution 0. Moreover, under some condition concerning to spatial inhomogeniety, this layered steady state is unique. We also study a migration selection model with integral term, and have succesfully constructed a layerd soution under the condition where diffusion term is very small.

研究分野：非線形解析

キーワード：非線形反応拡散方程式　特異摂動問題　遷移層

１．研究開始当初の背景

拡散は一般に均一化を促すと考えられている．実際に単独の自励系においては，凸領域上の安定定常解は定数解に限ることが明らかになった．``安定定常解なら自明解である"というこれらの結果は，単独方程式において拡散はパターン形成を抑制する働きをもつことを示唆している．次に反応項が空間に対して非一様な場合には``安定定常解なら自明解である"という事実は成り立たず，定常解は安定であっても実にさまざまな形状をもちうる．空間一様の状況下では空間的に非一様な安定解は存在しえないが，反応項に少しでも空間的摂動を加えると空間１次元の領域上であっても非常に大きなギャップをもつ安定定常解が多数現れることもわかってきた．

２．研究の目的

非線型反応拡散系において拡散係数を微小にすると，解が遷移層やスパイクなどの際立ったパターンを形成することが知られている．本研究では空間的に非一様な非線型反応拡散方程式を扱い，定常解全体の構造や時間依存解のダイナミクスに空間的非一様性がいかなる影響をあたえるかを明らかにする．特に空間非一様性が定常解の個数，あるいは一意性に与える影響，さらに空間非一様性と定常遷移層や定常スパイクの位置や安定性との関連を研究する．

３．研究の方法

次の３つの問題に焦点を絞り研究を進めた．

Ｉ．空間非一様な反応拡散方程式で記述される遺伝子頻度モデルを扱う．このモデルは 1975 年 Nagylaki によるもので，2002 年には Lou-Nagylaki により次のような数学的な予想がえれらた．

予想 1．方程式の非線形項がもつ環境変数 g(x)がある条件を満たすとき，拡散係数を微小とした状況下で漸近安定な定常解が存在し，その定常解は唯一の非定数定常解である．

予想 2．環境変数 g(x)が Conjecture 1 の条件を満たさないとき，拡散係数を微小とした状況下でちょうど 2 個の非定数定常解が存在する．1 つは漸近安定な定常解で，もう 1 つは不安定な定常解である．

予想が提起されて以来１０年以上も証明が与えられなかったのは，方程式の非線形項が退化しており扱いが困難なことに起因する．この困難を克服し，空間非一様性と定常解が形成する遷移層の位置との関連性，定常解の安定性と一意性について研究する．

II．I で扱った遺伝子モデルにパンミクシーの効果を加えたモデル方程式をで考える．数学的には解の積分平均の項がパンミクシーの効果を記述し，交配により空間的に遺伝子が広がっていく効果を表す．拡散と空間非一様性が微妙なつり合いをとって遷移層を形成する現象について述べてきたが，さらに積分平均の効果を加える．この積分平均の項も均一化を促すものである．拡散，空間非一様性，積分平均の３つの要素はつり合いをとって定常遷移層を形成することができるのか否かという疑問を解決する．

III. Allen-Cahn 方程式は双安定型応拡散方程式になっており，物理学における相転移問題などのモデルとして知られている．報告者(2003,JDE)において，Equal well depth という条件のもと1次元の区間上でAllen-Cahn 方程式を扱い拡散係数を微小にしたとき次のような結果が得られた．

1.一箇所に複数の遷移層が折り重なって現れる，多重遷移層をもつ定常解の存在を示した．

2.遷移層の配置および個数と解のモース指数(不安定指数)との関係を完全に解明した．

以上１次元区間上での結果を空間２次元以上の場合に拡張することは多くの研究者によって試みられている．一般に空間多次元の場合には，１次元の場合にくらべ遷移層の形状が多様で複雑になるため遷移層の様子を解析することは難しいが，その困難を克服しつつ，多次元の領域上での方程式系の非一様性と遷移層の形状や安定性との関連について研究する．

４．研究成果

（I）遺伝子モデルに現れる遷移層の解析，定常解の安定性と一意性の研究

空間非一様な反応拡散方程式であらわされる遺伝子頻度のモデルを１次元の有界区間上で扱い，次の結果を得た．

結果．多数の遷移層をもつ定常解を構成することに成功した．この定常解は線型安定である．このほかに定常解が存在するならば，その定常解は常に自明解０の近くに値をとる．さらに空間非一様性に関するある条件下のもとこの遷移層をもつ定常解は一意の定常解となる．上記の結果の一部は学術論文 The uniqueness of indefinite nonlinear diffusion problem in population genetics, Part I (投稿中，著者

Kimie Nakashima) にまとめられた.

(II) 積分項付きの空間非一様な反応拡散方程式の研究

(I)で扱った遺伝子モデルにパンミクシーの効果を加えたモデル方程式を考える.
積分項はパンミクシーの効果，すなわち交配により空間的に遺伝子が広がっていく効果を表している．以上に拡散と空間非一様性が微妙なつり合いをとって遷移層を形成する現象について述べてきたが，さらに積分平均の効果を加える．この積分平均の項も均一化を促すものである．拡散，空間非一様性，積分平均の３つの要素はつり合いをとって定常遷移層を形成することができるのか否かという疑問を解決する．この方程式に関し，Li-報告者-Ni による Nonlocal effects in an integro-PDE model from population genetics （印刷中）では微小な微分係数と微小なパンミクシーの効果に対し，この方程式の定常解が存在することが証明された.

現在，さらに研究をすすめ，拡散係数を微小としたとき遷移層をもつ定常解を構成し，その遷移層の位置，安定性などの詳細な性質を明らかにされた．この方程式は順序保存系となっており，定常問題の優解劣解を構成すれば(Q)の定常解を得ることができることを発見した．(I) の問題を扱った申請者による投稿中の論文では，1 次元の場合に遷移層を持つ定常解を形成している．この積分項無しの問題の定常解に摂動を加え，積分項付きの問題の優劣解を構成する．優解と劣解の間に定常解が存在するが，優解と劣解の間の幅は非常狭く(近く)，その間に存在する定常解の形状を詳しく表現することができる.

(III)空間多次元での双安定型方程式の定常解に関する研究

Equal-well-depth 型の Allen-Cahn 方程式を考える．一般に空間多次元の解の形状は複雑になるため解の形状の解析は難しい．方程式の安定定常解を優解劣解の方法により構成する。この定常解が持つ遷移層はある界面方程式の解の近傍に現れることを証明した．また逆に任意の定常解がもつ内部遷移層は，ある界面方程式の解の近傍以外には現れえないことを証明した.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　２件）

1. Fang Li, <u>Kimie Nakashima,</u> Wei-Ming Ni,
Non-local effects in an integro-PDE model from population genetics,
European Journal of Applied Mathematics
掲載決定 (オンライン発表済み)
DOI:10.1017/S0956792515000601

2．Fang Li，<u>Kimie Nakashima</u>
Transition layers for a spatially inhomogeneous Allen-Cahn equation in multi-dimensional domains,
Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A Vol.32 1391-1420 (2012)

〔学会発表〕（計　３件）

１. The uniqueness of indefinite nonlinear diffusion problem in population genetics
<u>中島主恵</u>，九州関数方程式セミナー
(2016 年１月，福岡)

２．Uniqueness and stability of multi layered steady state in a spatially in homogeneous reaction diffusion equation,
<u>中島主恵,</u> 日本数学会秋季総合分科会
(2015 年 10 月，京都)

３．Stability and Uniqueness of multi layered solutions,
<u>Kimie Nakashima,</u>
2013 Xiamen Workshop on Variational Problems and Evolution Equations (2013 年７月，Xiamen, China)

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
中島主恵（NAKASHIMA，Kimie）

東京海洋大学・学術研究院・准教授

研究者番号：10318800

(2)研究分担者

( )

研究者番号：

(3)連携研究者

( )

研究者番号：