

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 29 日現在

機関番号：17601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540216

研究課題名(和文) 反応拡散系の漸近解構築への理論的アプローチ

研究課題名(英文) A theoretical approach to constructing asymptotic solutions to reaction-diffusion systems

研究代表者

飯田 雅人 (Masato, Iida)

宮崎大学・工学教育研究部・教授

研究者番号：00242264

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：反応拡散系に現れるさまざまな特徴的な形状を持つ解の多くは、その存在が数値実験では示唆されているものの、理論的には未検証である。本研究課題では、角遷移層を持つ解と、数理生態学における多種個体群の多段階侵入を表す解に対し、解の形と動きを近似する漸近解の構築理論を作る際に役立つ重要な情報が、以下のとおり得られた。(1)複数の反応拡散系の特異極限における解形状や解構造を統一的に説明できる観点を導入し、角遷移層が特異極限として現れる可能性を判断する手がかりを得た。(2)多種協調拡散系の多段階侵入を表す漸近解の構成単位の候補として有力視される単一波形解について、存在・安定性等の大域構造を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：In reaction-diffusion systems various shapes of solutions were observed by numerical simulations, however most of them have not rigorously been verified yet. Through this research much information, that will help us to construct asymptotic solutions approximating solutions with 'corner layer' and solutions which describe 'multi-stage invasion' in population dynamics, have been obtained as follows. (1)Some united viewpoints over several reaction-diffusion systems have been introduced, in order to describe the shapes and the structure of the solutions in their singular limits. The viewpoints will help us to decide whether corner layers do appear or not in some singular limits. (2)The global structure of 'single waves' in the Fisher-KPP equation have been shown in collective known facts concerning their existence and stability. Asymptotic solutions which describe multi-stage invasion in cooperation-diffusion systems with many species will be constructed of these single waves.

研究分野：数学解析

キーワード：非線形解析 反応拡散系 漸近解

1. 研究開始当初の背景

半線形放物型偏微分方程式系として拡散項と(微分を含まない)反応項だけから成る反応拡散系では、反応項の形やパラメータの値によっては、さまざまな特徴的な形状を持つ解が現れることが、多くの数値実験から示唆されている。それらの理論的な検証に関しては、十分解明されていない形状の解が多い。本研究課題では、そのような解のうち、以下(1)(2)で述べる角遷移層を持つ解と多段階侵入に相当する解に対し、それらの理論的な裏づけを試みる。

(1) 角遷移層とは、(解の値そのものではなく)解の勾配が急激に変化する狭い範囲のことである。そこを遠目に観察すると、解の空間的な形状が文字通り角張っているように見える。角遷移層は、反応項のうち複数成分間の相互作用を表す部分が巨大な係数を持つ場合にしばしば現れる。特に巨大係数を無限大級にした特異極限においては、解の角遷移層での形状が本当に尖った角になり、そのとき解は(適当な意味で)ある自由境界問題をみたくすることが形式的に知られている。この形式的事実への理論的アプローチの第1歩として、Lotka-Volterra型競争関係にある2種の個体群の挙動を記述する2種競争拡散系では、相互作用項の巨大係数を無限大へ飛ばすときに反応拡散系の解が自由境界問題の弱解へ収束することが L^2 位相に基づく枠組で既に示されている(Dancer-Hilhorst-Mimura-Peletier, European J. Appl. Math., Vol.10, 1999)。

(2) 一方、スカラー型反応拡散方程式において空間次元1の場合に、異なる速度を持つ複数の進行波形の衝突(または追突)・消滅を示唆する形状・ダイナミクスを持つ全域解(時刻変数 t と空間変数 x が $-$ から $+$ に至る全範囲で存在する特解)が、既に研究分担者たちによって理論的に構成されている。これら諸研究に触発され、研究代表者・研究分担者らは、互いに協調関係にある多種Lotka-Volterra型反応拡散系(協調拡散系)の未開地侵入問題に対し、全種の拡散係数が等しく空間次元が1という条件のもとで、解の初期状態が単一波形なのに、時間経過とともに単一波形が「互いに異なる移動速度を持つ複数の波形」に分離しながら空間的に広がっていく様子を、漸近解を構成することにより、理論的に示唆した(Iida-Lui-Ninomiya, SIAM J. Math. Anal., Vol.43, 2011)。この結果を生物モデルとして解釈してみると、次のようになる: 各種の個体群がそれぞれ異なる速度で未開地へ侵入していくとともに、先行侵入種は後続侵入種が新たに参入する度に(後続種との協調関係によって)増殖が段階的に増強され、結果として、各種の個体数密度の分布形状は階段型に近くなる。特に、先行種は後続種よりも階段型形状の段数が

多くなる(最後から侵入する種は1段のみの単一波形になる)。このような侵入状況を多段階侵入と呼ぶことにする。

2. 研究の目的

本研究課題では、上記の角遷移層と多段階侵入に対し、解の形状とダイナミクスを具現化する漸近解の構築理論を作る手がかりとして、以下の解析と検討を行なう。

(1) 数値実験等により角遷移層の存在が示唆されている複数の反応拡散系に対して角遷移層型漸近解を統一的に構築するための準備として、それらの特異極限に現れるさまざまな解構造について、既知の結果を整理し、理論的な根拠に基づき想定し得る未知の解構造の可能性を探求する。

(2) 多種協調拡散系の多段階侵入を近似する漸近解を、拡散係数が一致しない場合も含む一般の状況のもとで構築する準備として、単一波形解の性質をさまざまなパラメータのもとで調べて整理する。さらに、単一波形解を貼り合わせて特定の全域解を構成する方法の可否を検討し、多段階侵入型漸近解の構築へ応用することを目指す。

3. 研究の方法

(1) 角遷移層の存在が見込まれる複数の反応拡散系に対する角遷移層型漸近解の統一的な構築の準備として、以下を実行する。

角遷移層が現れる反応拡散系に限らず、角遷移層に関連の深いさまざまな反応拡散系に対し、それらの特異極限に現れる解の形状や解構造について、既知の諸結果を整理し、それらを個別の反応拡散系によらずに統一的に説明することが可能な観点としてまとめる。

走化性効果の入った反応拡散系、移流競争拡散系、非局所制約条件付き反応拡散方程式など、競争拡散系と関連する複数の反応拡散系に対し、接合漸近展開法に基づき特異的形狀定常解を構成し、線形化固有値の挙動に基づき定常解の周りの解の挙動を調べる。さらに、そこで得られる結果と方法論を手がかりとして、2種競争拡散系に対する角遷移層型の漸近解の構成方針を練る。

角遷移層と同時に内部遷移層が現れる状況の漸近解を構築するため、2種競争拡散系の反応項を2成分のべき乗形に単純化して一方の成分の拡散係数を0とした2成分反応拡散系に対し、相互作用の次数をさまざまな値に取り替えて遷移層の移動速度の変化を、数値実験および形式的な計算によって調べる。

(2) 多種協調拡散系において多段階侵入を表す筈の解は、侵入の各段階の前後に限定し

て局所的に観察すれば、Fisher-KPP 方程式における単一波形解に似た形と動きを示すことが(少なくとも形式的に)予想される。そこで、Fisher-KPP 方程式の単一波形解を基に、多種協調拡散系の局所漸近解を複数作成し、それらの貼り合わせを工夫することにより、多段階侵入の形と動きを大域的に精密近似する漸近解の構成を試みる。この方針を実行するための準備として、単独の反応拡散方程式として基本的な Fisher-KPP 方程式や Allen-Cahn-南雲方程式において、単一波形と関連が深い様々なタイプの全域解の存在条件、性質などを整理しておく。

なお、(1)(2)の解析が計画どおり進まない事態に備えるため、反応拡散系の解析が盛んな関東・関西・福岡などの非線形解析の諸研究室へ出張して徹底的に討論することにより、蓄積された調査・解析結果を整理し、計画遂行のアイデアを修正・改善する。さらに、解析手法を異なる視点から捉え直すための場として、関連分野の気鋭の研究者を宮崎へ招聘して研究集会を開催し、本研究課題の解析手法を検討・改善するための手がかりについて討論する。

4. 研究成果

(1) 反応拡散系は、見かけ上は反応項と線形拡散項だけの単純な形で表されてはいるものの、そこに内包される解構造は存外豊富であることが明らかになった。例えば、ステファン問題などの自由境界問題や準線形拡散などの非線形拡散と実質的に同じ解構造までもが反応拡散系に内包されていることが、特異極限を介してわかる。さらに、これらの事実を個別の反応拡散系によらない(ある程度)統一的に説明できる観点を与えることができた。ここまでの成果および関連する解構造の考察を、総説としてまとめ、査読付き雑誌に発表した。総説の内容は、反応拡散系の特異極限として現れ得る未知の解形状や解構造を解明していく手がかりになるものと期待される。

走化性効果の入った反応拡散系、移流競争拡散系、非局所制約条件付き反応拡散方程式などに対し、連携研究者たちが特異的形狀定常解の存在と安定性などの解構造を明らかにした。これらの成果の基礎になった接合漸近展開法では、定常解の形状が特異的になる狭い範囲内では、適切な尺度変換で得られる縮約方程式の全域解によって定常解を局所的に近似し、その範囲外(定常解がなめらかな範囲)では特異極限問題の大域解で近似し、両者を巧妙に接合することで定常解に対する大域的な漸近解を構成する。連携研究者による成果は、次期研究課題における非定常解の非定常スペクトル解析と組み合わせることにより、2種競争拡散系に対する角遷移層型の精密な漸近解を接合漸近展開法

で構成する際、角遷移層内での局所漸近解と角遷移層の外側での特異極限解の間の接合可能性を証明するための重要な手がかりとなる。

相互作用の回数に応じて、遷移層の移動速度はさまざまなタイプの有限値になり得ること、さらには移動速度が無限大にもゼロにもなり得ることが、数値実験および形式的な計算によって明らかになった。また、この事実を理論的に裏付けるため、相互作用の回数値の範囲をある程度制限した上で、この事実に対する部分的な証明を与えた。

(2) Fisher-KPP 方程式や Allen-Cahn-南雲方程式の全域解の性質などを整理する中で、以下の成果が得られた。単一波形解を貼り合わせて多段階侵入を近似する漸近解を構成するまでには至らなかったが、以下の成果により、次期研究課題の中で貼り合わせによる漸近解構築を進めるための基盤が固まった。

Fisher-KPP 方程式および Allen-Cahn-南雲方程式における進行波等の全域解について、存在、安定性、伝播速度などの諸性質を関連する基礎知識とともに研究分担者が整理し、反応拡散系の進行波についての初心者向け専門書として出版した。

多種協調拡散系において、多段階侵入が起き得る状況および多段階侵入が退化した不完全多段階侵入が起き得る状況を判別する条件が、形式的には明らかになり、研究代表者が整理して研究集会にて発表した。

協調拡散系のさまざまな多段階侵入の状況を数値実験によって把握するための参考調査として、2種競争拡散系に対し、さまざまな値のパラメータについて数値実験を行った結果、2段階侵入が起き得る状況を(部分的にはあるが)推測できたので、研究分担者が著書の中で紹介した。

なお、本研究課題の計画遂行に関連して宮崎で開催した研究集会「Mathematics and Phenomena in Miyazaki」における討論は、本研究課題における解析手法の検討・改善に十分役立った。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計11件)

K. Kuto, T. Tsujikawa, Limiting structure of steady-states to the Lotka-Volterra competition model with large diffusion and advection, *Journal of Differential Equations*, 査読有, Vol.258, No.5, 2015, pp.1801-1858, DOI:10.1016/j.jde.2014.11.016

飯田 雅人、二宮 広和、反応拡散近似とその周辺、数学、査読有、Vol.66、No.3、2014、pp.225-248、
<http://mathsoc.jp/publication/sugaku/#contents>

M. Iida、H. Monobe、H. Murakawa、H. Ninomiya、The behavior of the interfaces in the fast reaction limits of some reaction-diffusion systems with unbalanced interactions、数理解析研究所講義録(京都大学数理解析研究所)、査読無、No.1892、2014、pp.88-94、
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1892.html>

H. Monobe、H. Ninomiya、Multiple existence of traveling waves of a free boundary problem describing cell motility、Discrete and Continuous Dynamical Systems. Ser. B、査読有、Vol.19、No.3、2014、pp.789-799、DOI:10.3934/dcdsb.2014.19.789

Y.-Y. Chen、Y. Kohsaka、H. Ninomiya、Traveling spots and traveling fingers in singular limit problems of reaction-diffusion systems、Discrete and Continuous Dynamical Systems. Ser. B、査読有、Vol.19、No.3、2014、pp.697-714、DOI:10.3934/dcdsb.2014.19.697

M. Iida、Different degrees of reaction rates can block interfacial dynamics in reaction-diffusion systems、Proceedings of Seminar on Partial Differential Equations in Osaka 2012—in honor of Professor Hiroki Tanabe's 80th birthday—、査読無、2013、pp.39-43、
<http://ir.library.osaka-u.ac.jp/dspace/handle/11094/24563>

K. Kuto、T. Tsujikawa、Bifurcation structure of steady-states for bistable equations with nonlocal constraint、Discrete and Continuous Dynamical Systems, Supplement、査読有、2013、pp.467-476、
<http://www.aimsciences.org>

Y.Y. Chen、J.S. Guo、H. Ninomiya、Existence and uniqueness of rigidly rotating spiral waves by a wave front interaction model、Physica D、査読有、Vol.241、No.20、2012、pp.1758-1766、DOI:10.1016/j.physd.2012.08.004

K. Kuto、K. Osaki、T. Sakurai、T.

Tsujikawa、Spatial pattern formation in a chemotaxis-diffusion-growth model、Physica D、査読有、Vol.241、No.19、2012、pp.1629-1639、DOI:10.1016/j.physd.2012.06.009

(学会発表)(計22件)

T. Tsujikawa、Stationary and spatio-temporal patterns for a chemotaxis-growth model, a survey、Mini-workshop on Models of Directional Movement and their Analysis、2015年3月26~28日、東北大学川井ホール(宮城県・仙台市)

T. Tsujikawa、Bifurcation structure of steady states for a bistable equation with nonlocal constraint、Mini-workshop on Models of Directional Movement and their Analysis、2015年3月26~28日、東北大学川井ホール(宮城県・仙台市)

M. Iida、Vanishing, moving and immovable interfaces in fast reaction limits、The 32nd Kyushu Symposium on Partial Differential Equations、2015年1月28~30日、九州大学西新プラザ(福岡市)

辻川 亨、移流反応拡散方程式におけるパターン形成について、研究集会「生物数学の理論とその応用」、2014年9月16~19日、京都大学数理解析研究所(京都市)

H. Ninomiya、Dynamics of a free boundary problem arising from excitable systems、Sixth Euro-Japanese Workshop on Blow-up、2014年9月1~5日、東京工業大学(東京都・目黒区)

飯田 雅人、生物集団の多段階侵入の定式化 協調拡散系の場合、三浦康秀先生ご退職記念研究集会 "Dynamics and Special Functions"、2014年2月22日、岩手大学人文社会科学部(岩手県・盛岡市)

辻川 亨、Bifurcation structure of steady states for a logistic equation with nonlocal constraint、反応拡散系のパターンダイナミクス、2013年11月29~30日、富山大学理学部(富山市)

辻川 亨、Global structure of the stationary solutions for the limiting system of an Chemotaxis-Growth Model、Mathematical Analysis of

Pattern Formation Arising in Nonlinear Phenomena、2013年10月30日～11月1日、京都大学数理解析研究所(京都市)

M. Iida、The behavior of the interfaces in the fast reaction limits of some reaction-diffusion systems with asymmetric reaction rates、RIMS Workshop "New Role of the Theory of Abstract Evolution Equations From a Point of View Overlooking the Individual Partial Differential Equations"、2013年10月21日～23日、京都大学数理解析研究所(京都市)

H. Ninomiya、Traveling Spots of the Singular Limit Problems of FitzHugh-Nagumo Equations、One Forum, Two Cities 2013: Aspect of Nonlinear PDEs、2013年9月17～20日、早稲田大学西早稲田キャンパス(東京都・新宿区)

二宮 広和、反応拡散系における拡散の役割、数理生物学会2013年会、2013年9月11～13日、静岡大学浜松キャンパス(静岡県・浜松市)

H. Ninomiya、Traveling spots and obstacle-induced spirals in an excitable medium、International Workshop on PDEs and Related Topics in Nonlinear Problems、2013年2月12日、広島大学(広島県・東広島市)

飯田 雅人、Some topics in "reaction-diffusion approximation"、研究集会「第8回非線型の諸問題」、2012年9月11～13日、宮崎県婦人会館(宮崎市)

M. Iida、On the fast reaction limit of a reaction-diffusion system whose interaction terms are non-relative to each other、Seminar on Partial Differential Equations in Osaka 2012 In honor of Professor Hiroki Tanabe's 80th birthday、2012年8月20～24日、大阪大学吹田キャンパス(大阪府吹田市)

〔図書〕(計1件)

二宮 広和、共立出版、侵入・伝播と拡散方程式、2014、185頁、ISBN 978-4-320-11003-8

〔その他〕

企画・開催した研究集会(計3件)
研究集会 "Mathematics and

Phenomena in Miyazaki 2014"、2014年11月14日～11月15日、宮崎大学工学部(宮崎市)
<http://www.cc.miyazaki-u.ac.jp/math/mpm/>

研究集会 "Mathematics and Phenomena in Miyazaki 2013"、2013年11月15日～11月16日、宮崎大学工学部(宮崎市)
<http://www.cc.miyazaki-u.ac.jp/math/mpm/>

研究集会 "Mathematics and Phenomena in Miyazaki 2012"、2012年11月16日～11月17日、宮崎大学工学部(宮崎市)
<http://www.cc.miyazaki-u.ac.jp/math/mpm/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

飯田 雅人 (IIDA, Masato)
宮崎大学・工学教育研究部・教授
研究者番号: 00242264

(2) 研究分担者

二宮 広和 (NINOMIYA, Hirokazu)
明治大学・総合数理学部・専任教授
研究者番号: 90251610

(3) 連携研究者

辻川 亨 (TSUJIKAWA, Tohru)
宮崎大学・工学教育研究部・教授
研究者番号: 10258288