

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 29 日現在

機関番号：32619

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24540218

研究課題名(和文) 退化特異性をもつ非線形微分方程式の自由境界問題

研究課題名(英文) Free boundary problems of PDEs with degeneracy-singularity

研究代表者

竹内 慎吾 (TAKEUCHI, Shingo)

芝浦工業大学・システム理工学部・教授

研究者番号：00333021

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題を通して、 p -Laplacianの固有関数と、主に数論の基礎概念である楕円積分・楕円関数・超幾何関数・算術幾何平均などとの関連が見えてきた。一般化三角関数によるヤコビ楕円関数と完全楕円積分の一般化、およびそれらの応用として一般化円周率に関するガウス・ルジャンドル型アルゴリズムや古典的な微分方程式の一般化・解表示などを与えた。これらの一連の成果については、一般化三角関数を含む p -Laplacianの研究で著名な P. Lindqvist, R. Manasevich, M. Vuorinen の三氏から一定の評価を得ており、今後の分野横断的な研究につながる知見を得られたと考えている。

研究成果の概要(英文)：Through this research project, the relation between the eigenfunctions of p -Laplacian and fundamental concepts of number theory, such as elliptic integral, elliptic function, hypergeometric function, arithmetic-geometric mean, etc., has come to be seen. We gave generalization of Jacobi elliptic function and the complete elliptic integral by generalized trigonometric functions, and as their application we presented Gauss-Legendre's type algorithm on the constant π and generalization and expressions of solutions for classical differential equations. Regarding these series of results, we have received certain evaluations from P. Lindqvist, R. Manasevich, and M. Vuorinen, who are famous for research on p -Laplacian including generalized trigonometric functions. We believe that knowledge leading to cross-cutting research has been obtained.

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード： p -Laplacian 一般化ヤコビ楕円関数 一般化三角関数

1. 研究開始当初の背景

しかるべき条件下において、退化特異性をもつ放物型偏微分方程式の初期境界値問題の適切性や、これらの方程式の解の定常状態を記述する楕円型偏微分方程式の解の存在や正則性については、De Giorgi、Moserをはじめとする多くの研究者によって古くから研究されている。しかしながらその相互関係、すなわち放物型方程式の解が爆発せずに、対応する楕円型方程式の解集合へ収束する場合については、現在に至るまでほとんど研究されていない。したがって楕円型方程式の解の定常解としての安定性は、特別な場合を除いて未解決である。理由として主に次の二つがあげられる。

(1) 退化特異性をもつ方程式では一般に線形化安定性原理（線形化作用素の固有値の分布で安定性が決定される）が有効ではないこと。これは（形式的）線形化作用素もまた退化特異性を有することに起因する。

(2) 拡散項の退化性、または反応項の特異性が原因で、楕円型方程式の解集合が連続体を含むこと。このとき、対応するリアプノフ汎関数の極小点は必ずしも狭義極小とはいえず、個々の定常解の安定性を導くことが困難となる。

これらの理由により、放物型方程式の解の漸近挙動、特に楕円型方程式の解の近傍に初期関数をとった場合の漸近挙動（定常解の安定性）は、定常解集合が離散的である場合を除き、国内外問わずほとんど手をつけられていないのが現状である。

2. 研究の目的

退化特異性をもつ偏微分方程式は、画像処理、レオロジー、数理生物学などの分野に現れる非線形現象を記述する際に用いられ、その数理が近年盛んに研究されている。退化特異性とは、偏微分方程式の主な項が解の値や勾配によってゼロ（退化）または無限大（特異）となる性質である。本研究は、退化特異性をもつ放物型偏微分方程式が生成する力学系の構造を解明することを全体構想として、その定常状態を記述する楕円型偏微分方程式の解集合の構造、特に個々の解の自由境界が形成される仕組みを数学的に解明し、その応用として放物型方程式の解の漸近挙動を調べる方法を開発することを目的とする。

3. 研究の方法

微分方程式の主要項がもつ退化特異性が解の形状へ及ぼす影響を調べるために、空間1次元の p -Laplacian の定常問題、特に固有値問題に注目する。その際、典型的な解とし

て次の二種類の特殊関数が現れる。

- (1) 双安定型方程式の解を古典的なヤコビ楕円関数で表現できることがよく知られている。このことから類推するとわかるように、 p -Laplacian を含む双安定型方程式の解はヤコビ楕円関数を一般化した関数（一般化ヤコビ楕円関数）を与える。
- (2) 単振動方程式の固有値問題の解は（然るべき境界条件の下で）三角関数で表現できる。このことから類推するとわかるように、 p -Laplacian を含む単振動型方程式の固有値問題の解は三角関数を一般化した関数（一般化三角関数）を与える。

これらの特殊関数は退化特異性もつ方程式の典型的な解であるにもかかわらず、ヤコビ楕円関数や三角関数をもつ加法定理のような基本的な性質が知られていない。したがってその性質を詳しく調べ、楕円積分の一般化や別の方程式の解を表現するなどの応用を考えることによって、退化特異性に関する新しい知見を得る。

4. 研究成果

本研究課題では、一般化ヤコビ楕円関数、および一般化三角関数に関して以下の成果を得た。

- (1) 研究代表者は過去に、退化特異性をもつ双安定型方程式の分岐問題において、ヤコビ楕円関数を一般化した新しい関数族を導入することでその解集合を完全に決定し、分岐構造を解明することに成功した（Takeuchi, 2012）。本研究課題では、この関数族について、異なる周期をもつ関数系が任意のルベグ空間において基底をなすことを示した。これは一般化三角関数系に対する Binding らの結果を拡張したものになっている。特に古典的なヤコビ楕円関数系が基底になることは、この研究によって初めて明らかになった。
- (2) 一般化三角関数は p -Laplacian の固有関数であるが、その算術的性質はほとんど知られていない。例えば加法定理はヤコビ楕円関数に帰着できる場合のみ示されている。本研究課題では、ある種のパラメータ関係にある広範囲の一般化三角関数について、加法定理を経由せず倍角公式に相当する公式を発見・証明することに成功した。この公式は正弦関数の倍角公式だけでなく、レムニスケート関数のそれも含んでいる。この結果により、ある種の単振り子型方程式の解表示や、Edmunds らによる特別な場合の加法定理に対する別証明を与えることができた。

- (3) 古典的な完全楕円積分を、その三角関数表示において三角関数を一般化三角関数に置き換えることによって一般化した。これは一般化ヤコビ楕円関数に対する周期や、Borwein 兄弟の超幾何関数による完全楕円積分の一般化に対する積分表示を与えている。さらにこの一般化楕円積分についてルジャンドル型関係式が成り立つことを証明し、特別な場合に限ってはあがるが一般化円周率に関するガウス・ルジャンドル型のアルゴリズムを導出した。

本研究課題を通して、 p -Laplacian の固有関数と、主に数論の基礎概念である楕円積分・楕円関数・超幾何関数・算術幾何平均などとの関連が見えてきた。これらの一連の成果については、一般化三角関数を含む p -Laplacian の研究で著名な P. Lindqvist(ノルウェー科学技術大学), R. Manasevich(チリ大学), M. Vuorinen(フィンランド・トゥルク大学) の三氏から一定の評価を得ている。まだこれらの数論的な成果を退化特異型微分方程式の研究に還元できてはいないが、今後の分野横断的な研究につながる知見を得られたと考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

Shingo Takeuchi, Arithmetic properties of the generalized trigonometric functions, in "Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations and Related Areas", RIMS kokyuroku, in press, 査読無

Toshiki Kamiya and Shingo Takeuchi, Complete (p,q) -elliptic integrals with application to a family of means, Journal of Classical Analysis 10 (2017), 15-25, 査読有, dx.doi.org/10.7153/jca-10-02

Shingo Takeuchi, Multiple-angle formulas of generalized trigonometric functions with two parameters, Journal of Mathematical Analysis and Applications 444 (2016), 1000-1014, 査読有, dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.06.074

Shingo Takeuchi, Legendre-type relations for generalized complete elliptic integrals, Journal of Classical Analysis 9 (2016), 35-42, 査読有, dx.doi.org/10.7153/jca-09-04

Shingo Takeuchi, A new form of the generalized complete elliptic integrals, Kodai Mathematical Journal 39 (2

016), 202-226, 査読有, doi:10.2996/kmj/1458651700

Shingo Takeuchi, The basis property of generalized Jacobian elliptic functions, Communications on Pure and Applied Analysis 13 (2014), 2675-2692, 査読有, dx.doi.org/10.3934/cpaa.2014.13.2675

[学会発表](計23件)

小林佑行, 竹内慎吾, 一般化三角関数に対する積分公式, 微分方程式論ワークショップ岐阜 2017, 岐阜大学, 2017/3/9

竹内慎吾, 1次元 p ラプラシアン固有関数に関する数論的性質, 九州関数方程式セミナー, 福岡大学, 2017/1/27

小林佑行, 竹内慎吾, 一般化三角関数に対する積分公式, 第3回 ODE 若手セミナー, 岡山理科大学, 2016/12/15

大場孝則, 竹内慎吾, 一般化三角関数に対する Mitrinovic-Adamovic 不等式, 第3回 ODE 若手セミナー, 岡山理科大学, 2016/12/15

Shingo Takeuchi, Arithmetic properties of eigenfunctions of the one-dimensional p -Laplacian, International Workshop on Nonlinear PDEs 2016 in Osaka, Osaka Prefecture University, Osaka, Japan, 2016/12/9

Shingo Takeuchi, Arithmetic properties of eigenfunctions of the one-dimensional p -Laplacian, Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations and Related Areas, RIMS, Kyoto, Japan, 2016/11/17

竹内慎吾, Application of generalized trigonometric functions to Elliott's identity, 常微分方程式の定性的理論ワークショップ(杉江実郎教授還暦記念集会), 島根大学, 2016/9/22

Shingo Takeuchi, Generalized trigonometric functions: multiple-angle formulas and an application to Elliott's identity, Workshop on Geometric Function Theory and Special Functions, Tohoku University, Sendai, Japan, 2016/8/26

Shingo Takeuchi, Multiple-angle formula of generalized trigonometric functions with two parameters, The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (AIMS2016), Orlando, Florida, USA, 2016/7/2

竹内慎吾, 一般化三角関数の倍角公式と p -Laplacian への応用, 日本数学会年会, 筑波大学, 2016/3/16

神谷隼基, 竹内慎吾, 1次元 p -Laplacian の固有関数による完全楕円積分の一般

化とその関係式について, 第 41 回発展方程式研究会, 日本女子大学, 2015/12/25

Shingo Takeuchi, Multiple-angle formula of generalized trigonometric functions with two parameters, 3rd Chile-Japan Workshop on Nonlinear PDEs, Osaka University, Osaka, Japan, 2015/12/9

Shingo Takeuchi, Means and generalized trigonometric functions, Nonlinear PDE Workshop at Tohoku University, Tohoku University, Sendai, Japan, 2015/9/24

竹内慎吾, 完全(p,q)楕円積分とBhatia-Li 平均への応用, 日本数学会秋季総合分科会, 京都産業大学, 2015/9/13

竹内慎吾, 一般化三角関数の倍角公式とある種の p 単振り子方程式, 名古屋大学における微分方程式セミナー(通算第 38 回), 名古屋大学, 2015/9/8

竹内慎吾, Applications of generalized trigonometric functions to means, 第 133 回神楽坂解析セミナー, 東京理科大学, 2015/6/27

竹内慎吾, 完全 p 楕円積分と $\sqrt{3}$ の計算公式, 日本数学会秋季総合分科会, 広島大学, 2014/9/25

竹内慎吾, 完全 p 楕円積分と $\sqrt{3}$ の計算公式, 熊本大学における微分方程式セミナー(通算第 37 回), 熊本大学, 2014/9/9

Shingo Takeuchi, The basis property of generalized Jacobian elliptic functions, The 10th AIMS International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations and Applications (AIMS2014), Madrid, Spain, 2014/7/8

竹内慎吾, 一般化ヤコビ楕円関数系に関する基底の問題, 日本数学会秋季総合分科会, 愛媛大学, 2013/9/24

- 21 Shingo Takeuchi, Generalized Jacobian elliptic functions with applications to p-Laplacian bistable problems, Global Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations and Its Applications, RIMS, Kyoto, Japan, 2012/11/8

- 22 竹内慎吾, 一般化ヤコビ楕円関数と p-ラプラシアン, 第 6 回なかもず解析セミナー, 大阪府立大学, 2012/10/29

- 23 Shingo Takeuchi, On a generalized Jacobian elliptic function associated with p-Laplacian, The 9th AIMS International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations and Applications (AIMS2012), Orlando, Florida, USA, 2012/7/3

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.sic.shibaura-it.ac.jp/~shingo/index.html>

6 . 研究組織

研究代表者

竹内慎吾 (TAKEUCHI SHINGO)

芝浦工業大学・システム理工学部・教授

研究者番号 : 0 0 3 3 3 0 2 1