様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ５ 月 ２１ 日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４０２２０

研究課題名（和文）反応拡散方程式と関連する自由境界問題の研究

研究課題名（英文）Study on reaction-diffusion equations and related free boundary problems

研究代表者
山田　義雄（Yamada, Yoshio）

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：２０１１１８２５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円

研究成果の概要（和文）： 本研究では反応拡散方程式に対する自由境界問題を解析した。この問題は数理生態学における，外来生物などの生物種の侵入・移動をモデルとしており，種の個体数密度とその生息領域が時間とともにどのように変化するかを調べることが目的である。個体数密度は反応拡散方程式で記述され，生息領域の境界（またはその一部）の運動はステファン型の自由境界条件で支配されるとする。このとき種が絶滅に至るか、あるいは生息領域が無限に拡がるとともに種が存続するか，その挙動のメカニズムを理論的に解明できた。また，生息領域が拡大する際の速度はどのように定まるか？などの問題についても詳細な結果を得ることができた。

研究成果の概要（英文）： This research is concerned with a free boundary problem for reaction-diffusion equations in mathematical ecology. This problem models the invasion or migration of a certain biological species. Our main interest is to study the evolution of the population density and habitat of the species. The population density is described by a reaction-diffusion equation and the boundary (or a part of the boundary) of the habitat is controlled by a free boundary condition of Stefan type. We could obtain theoretical understanding on asymptotic behaviors of solutions for free boundary problems of various types: whether the species vanishes eventually or the species persists with spreading free boundary. Moreover, we got precise results on the spreading speed of the free boundary.

研究分野： 非線形微分方程式

キーワード： 反応拡散方程式　自由境界問題　数理生態学　非線形現象　正値定常解　非局所項

１．研究開始当初の背景

物理学、化学反応、数理生態学分野に現れる現象を**反応拡散方程式**によって記述するとき、その解は時間空間的なパターンを生成することが多い。そのような解の非一様性が生まれる要因としては、自由境界問題のように界面の運動があらかじめ明示されているモデル、非線形拡散項自身が空間非一様性を引き起こすモデル、拡散項・反応項におけるパラメータを大きくすることにより界面が生じるモデル、など様々なケースが考えられる。反応拡散方程式を対象とする研究においては、界面や自由境界などの時空非一様性の生成・発展のメカニズムを理論的に明らかにすることが重要な課題となる。

本研究において、とくに焦点を当てた研究課題は、数理生態学に現れる外来生物などの侵入・移住をモデルとする**自由境界問題**の解析である。このような自由境界問題は 2010 年 Du-Lin によって初めて導入され、生物種の個体数密度と生息領域が時間の経過とともにどのように変化するかを調べることが目的である。個体数密度はロジスティック型の反応項を伴う拡散方程式で記述され、生息領域の境界またはその一部が自由境界となり、その挙動はステファン型の境界条件によって支配されているとする。Du-Lin は 1 次元領域において、自由境界がある一定の限界を超えることができなければ生物種は絶滅すること、自由境界が一定の限界を超えれば生息領域は無限遠方まで拡がるとともに生物種は存続することを示した。これは、数学的には**種の絶滅**(vanishing)と**種の展開・存続**(spreading) に関する二者択一定理としてまとめられる。さらに、生物種が展開に成功した場合、自由境界の拡がる速度は一定の定数に近づくことも証明された。

この結果は自由境界問題について大きな関心を集め、拡散方程式における反応項の一般化、高次元領域での解析、二種以上の生物種に関わる問題設定など様々な方面での研究が始まった。

２．研究の目的

数理生態学における外来生物などの侵入・移住をモデルとする自由境界問題を扱う。これは、生物が新しい生息環境を求めて移動する状況を定式化した問題であり、生物の個体数密度と生息領域の境界（自由境界）が未知関数である。空間次元が 1 の場合の単純化されたモデルでは、生息領域の一端を固定境界、もう一方を時間変数とともに動く自由境界と考え、$0<x<h(t)$ の形の区間を生物種の生息領域と考える。生物種の個体数密度 $u=u(x,t)$ は次の反応拡散方程式

$$u_t = du_{xx} + f(u), \quad 0<x<h(t),$$

により支配されるとする。固定境界 $x=0$ における境界条件としては

$$u(t,0)=0 \quad \text{または} \quad u_x(t,0)=0$$

のようにディリクレ型あるいはノイマン型の境界条件を置く。さらに、自由境界においては

$$h'(t) = -\mu u_x\big(t,h(t)\big), \quad u\big(t,h(t)\big)=0$$

の形のステファン型の境界条件を置く。これは、境界における生物種の固体数密度による圧力が自由境界の駆動力となることを意味している。このタイプの自由境界問題は 2010 年に Du-Lin によって提起され、反応項が $f=u(a-bu)$ のような**ロジスティック型**であるときには、自由境界は一定の範囲内にとどまり種は絶滅に至る（vanishing)か、あるいは自由境界は無限に拡がり個体数密度は正値関数に収束する(spreading) か、いずれか一方のみが成り立つという**二者択一定理**が導かれている。さらに自由境界が無限遠方にまで拡がる場合には、その拡大速度は時間の経過ともに一定値に収束することも示されている。

本研究においては、反応項の関数 f がロジスティック型のケースだけではなく、数理生態学において重要な**双安定型**のケース

$$f(u)=u(1-u)(u-c), \ 0<c<1,$$

あるいは **Holling 型**、例えば

$$f(u)=u(a-bu)-u^2/(1+u^2),$$

のケースを含む、一般の反応項について取り扱う。その際、自由境界問題の解がどのような振舞いをするかを調べることが重要な課題であり、とくに種の絶滅(vanishing)や種の展開・存続(spreading) に対応する解の挙動を数学的に定義し、これらの現象が起こるメカニズムを理論的に明らかにすることが第一の目標である。

また自由境界問題では、反応項の形に応じて、解の挙動は変化する。ロジスティック項の場合は、解の挙動を 2 つのタイプに分類できるが､双安定の場合や Holling 型の場合は、状況が異なると予想される。したがって、できるだけ詳細に解の挙動を特徴付け、分類することが第二の目標である。

第三の目標は、2 次元以上の領域において自由境界問題を解析することである。例えば球状領域や円環領域のような球対称な状況において、密度関数や自由境界の挙動を解析することである。とりわけ、対応する定常問題の正値解集合の構造を詳しく知ることが重要となる。

３．研究の方法

反応拡散方程式に対する自由境界問題の数学的取り扱いにおいては、解の構成、大域解の存在、大域解の漸近的性質の導出などの基本的な結果を示すことが重要である。そのためには、関数解析、発展方程式論、変分法などの既存の方法に加え、数値シミュレーションによる解の漸近挙動の予想や、その正当化のためのアイデア・技法の開発や新しい理論の展開が必要となる。

（１） 研究者の役割分担

上記の状況のもとで、研究代表者、連携研究者は次のような役割分担を行った。
①反応拡散方程式に対する自由境界問題の研究を Y. Du 教授（New England 大学）、B. Lou 博士（同済大学）および研究室の大学院生の研究協力を得ながら進めた。
②反応拡散方程式の研究を山田、久藤、若狭、大枝が分担、非線形楕円型方程式の研究を山田、大谷、田中、中島、廣瀬、竹内が分担し、山田が研究の統括を行った。
③応用解析の立場から、大谷、久藤、若狭が協力し、必要な道具・技法の開発・研究にあたった。
④楕円型方程式の変分法による研究を大谷、田中、中島が担当した。
⑤自由境界問題の数値シミュレーションを山田と研究室の院生が行った。

（２）研究成果の発表と研究交流

研究代表者、連携研究者は学会の他、多くの数学研究者が一同に会する国際会議 AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications（第 9 回 2012 年オーランド（アメリカ）、第 10 回 2014 年マドリッド（スペイン））に出席、それぞれ研究発表をするとともに、参加者と研究交流を行った。また、研究代表者は本研究に密接に関連するテーマで開催された国際研究集会 Workshop on Nonlinear Equations in Population Biology （2013 年華東師範大学（上海））および Workshop on New Mathematical Developments Arising in Ecology, Epidemiology and Environmental Sciences（2013 年北京大学）に参加、講演するとともに、会議に参加した Du 教授や Lou 博士と最新の研究情報などの研究交流を行った。数学分野では研究集会、シンポジウムでの研究発表や研究討論を通して、新しい知見や重要なアイデアが生まれることも多い。本研究においても海外との研究者との交流を通して研究の幅を拡げ、将来の共同研究の芽を育むことができた。

４．研究成果

本研究課題の下で得られた成果は
（１）反応拡散方程式に対する自由境界問題（1 次元のケース）の研究
（２）球対称領域における自由境界問題の研究
（３）非局所項を伴う反応拡散方程式の研究
に大別される。以下、各研究テーマに関する成果の概要を述べる。

（１）反応拡散方程式に対する自由境界問題（1 次元のケース）の研究

生物種の侵入・移動をモデルとする自由境界問題において、その生息領域を 1 次元区間 $0 < x < h(t)$ とするとき左端を固定境界、右端を自由境界と考え、生物の個体数密度 u は

$$u_t = du_{xx} + f(u), \quad 0 < x < h(t),$$

の形の反応拡散方程式を満たすとする。ここで反応項の関数 f は、研究目的欄において述べたように、ロジスティック型、双安定型、Holling 型などの関数で与えられるとする。自由境界の運動は

$$h'(t) = -\mu u_x(t, h(t)), \; u(t, h(t)) = 0,$$

によって支配されるとする。固定境界においては零ノイマン条件または零ディリクレ条件を課す。このとき初期条件

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad h(0) = h_0,$$

を与えたとき、有界な大域解 $(u(x,t), h(t))$ が唯一つ存在することが知られている。

ここで最も重要なテーマは

「自由境界問題の解 $(u(x,t), h(t))$ の $t \to \infty$ における挙動を決定せよ」

に答えることである。そのために、解について**種が展開・存続する**(spreading)とは $t \to \infty$ のとき $h(t)$ が無限に拡がるとともに $u(t,x)$ が正値にとどまることと定義し、**種が絶滅する** (vanishing)とは $t \to \infty$ のとき $u(t,x)$ が 0 に収束することと定義する。このとき種が絶滅することと自由境界 $h(t)$ について時間が経過しても有限にとどまることが同値であることが示される。この結果、自由境界問題のどんな解についても spreading か vanishing のどちらか一方のみを満たすという**二者択一定理**が得られた。さらにそれぞれの現象が起こるための判定法も得られた。例えば、適当な境界条件の下で次の定常問題

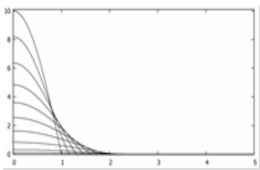
$$du_{xx} + f(u) = 0, \quad 0 < x < l,$$

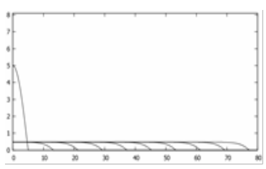
の正値解 φ が求まれば、(φ, l) を初期値とする自由境界問題の解は必ず spreading の性質を持つことが証明される。

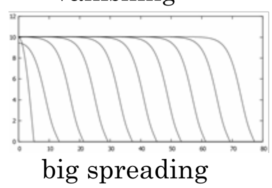
解の漸近挙動については、反応項の形に応じて、より詳細な結果が得られる。非常に興味深い結果が得られたのは Holling III 型の反応項

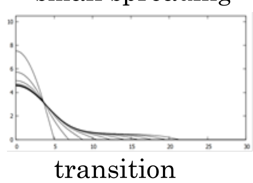
$$f(u) = u(a - bu) - u^2/(1 + u^2)$$

に対する自由境界問題である。a, b の値に応じて、4 個の平衡解 $0, u_1, u_2, u_3$ $(0 < u_1 < u_2 < u_3)$ があり、このうち u_1, u_3 が安定となる。このとき数値シミュレーションでは次の結果


vanishing


small spreading


big spreading


transition

が得られた。ここで特徴的なことは spreading 現象も複数のパターンに分類できることである。本研究の最終年度において自由境界問題の解の挙動は上の 4 つのパターンに分類できることを理論的に証明することに

成功した。さらに spreading が起きる場合における自由境界の拡大速度や、上の数値シミュレーションに示された、解の漸近的プロファイルについても非常に詳しい結果が得られる。実際、時間変数が大きいときには適当な正数 c と正値関数 q により

$$h'(t) \sim c,$$
$$u(t,x) \sim q(h(t)-x),\ 0<x<h(t),$$

の成り立つことが示される。 ここで c, q は境界値問題

$$dq''-cq'+f(q)=0,\ q>0,\quad x>0,$$
$$q(0)=0,\ \mu q'(0)=c,\ q(\infty)=u_1 \text{ または } u_3$$

の解として求まる。本研究では、この境界値問題の解構造を完全に解明することができ、この結果、解の漸近挙動について非常に詳しい情報が得られた。

（２）球対称領域における自由境界問題の研究

円環領域において１次元自由境界問題と同様の問題を考える。ここでは１次元のケースと同様な結果が得られるかどうかが課題となる。さらに、円環領域を $\rho(t)<|x|=r<R(t)$ とし、内部境界、外部境界ともに自由境界と考え、その運動は

$$\rho'(t)=-\mu u_r(t,\rho(t)),\quad R'(t)=-\mu u_r(t,R(t)),$$

により定められるとする。このとき、内部境界は中心方向に向かうため、消滅する可能性もある。この問題について反応項がロジスティック型の場合、spreading 現象が起きるときには内部自由境界は有限時間で消滅することを示すなどの研究成果を挙げている。多次元領域での解析はまだまだ未解決の課題が多い。

（３）非局所項を伴う反応拡散方程式の研究

このテーマの下で扱った方程式は

$$u_t=\Delta u_{xx}+u(a(x)-b(x)f(u)-k*g(u))$$

の形のものである。ここで f, g は単調増加関数で、非局所項 $k*v$ は

$$k*v(x)=\int_\Omega k(x,y)v(y)\,\mathrm{dy}$$

で定義されるとする。このとき、対応する定常問題の正値解を構成し、その安定性を判定する方法を確立することが課題である。とくに非局所項を伴う問題にたいする定常解の安定性を具体的に判定することは非常に難しい問題である。本研究においては、正値定常解の初等的な構成法と分岐理論を用いた構成法を示した上で、k, g に適当な仮定を設け、正値解の安定性や大域的安定性を判定する方法を編み出すことに成功した。ただ、一般的には定常解の安定性を解析する技法・アイデアはまだ不十分である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　16　件）

① Takashi Suzuki and Yoshio Yamada: Global-in-time behavior of Lotka-Volterra system with diffusion, Indiana Univ. Math. J. , Vol.64 (2015), pp. 181-216,査読有.

② Tohru Wakasa and Shoji Yotsutani: Limiting classificastion on linearized eigenvalue problems for 1-dimensional Allen-Cahn equation I – asymptotic formulas of eigenvalues, J. Differential Equatins, Vol. 258 (2015), pp. 3960-4006, 査読有.

③ Yoshio Yamada: On logistic diffusion equations with nonlocal interaction terms, Nonlinear Anal., Vol. 118 (2015), pp. 51-62, 査読有.

④ Kousuke Kuto and Tohru Tsujikawa: Limiting structure of steady-states to the Lotka-Volterra competition model with large diffusion and convection, J. Differential Equatios, Vol. 258 (2015), pp. 1801-1858, 査読有.

⑤David Arcoya, Colette De Coster, Louis Jeanjean and Kazunaga Tanaka: Continuum of solutions for an elliptic problem with critical growth in the gradient, J. Funct. Anal., Vol. 268 (2015), pp. 2298-2335, 査読有.

⑥ Mitsuharu Ôtani and Vasile Staicu: Existence results for quasilinear elliptic equations with multi-valued nonlinear terms, Set-Valued Var. Anal., Vol. 22 (2014), pp. 859-877, 査読有.

⑦Yuki Kaneko, kazuhiro Oeda and Yoshio Yamada: Remarks on spreading and vanishing for free boundary problems of some reaction-diffusion equations, Funkicial. Ekvac., Vol. 57 (2014), pp. 449-465, 査読有.

⑧Chao-Nien Chen and Kazunaga Tanaka: A variational approach for standing waves of FitzHugh-Nagumo type systems, J. Differential Equations, Vol. 257 (2014), pp. 109-144, 査読有.

⑨Shingo Takeuchi: The basis property of generalized Jacobian elliptic functins, Commun. Pure Appl. Anal., Vol. 13 (2014), pp. 2675-2692.

⑩ Kousuke Kuto and Tohru Tsujikawa: Stationary patterns for an adsorbate-induced phase transition model: II. Shadow system, Nonlinearity, Vol. 26 (2013), pp. 1313-1343, 査読有.

⑪Mitsuharu Ôtani and Shun Uchida: The existence of periodic solutions of some double-diffusive convection system based on Brinkman-Forchheimer equations, Adv. Math. Sci. Appl., Vol. 23 (2013), pp. 77-92, 査読有.

⑫ Georgia Karalli, Takashi Suzuki and Yoshio Yamada: Global-in-time behavior of the solution to a Gierer-Meinhardt system,

Discrete Contin. Dyn. Syst., Vol. 33 (2013), pp. 2885-2900, 査読有.
⑬ Fang Li and Kimie Nakashima: Transition layers for a spatially inhomogeneous Allen-Cahn equation in multidimensional domains, Discrete Contin. Dyn. Syst. Vol.32 (2012), pp. 1391-1420, 査読有.
⑭山田義雄：交差拡散を伴う非線形拡散方程式系－数理生態学に現れる反応拡散方程式系，数学,〉第 64 巻（2012），pp. 384-406, 査読有.
⑮Kousuke Kuto and Yoshio Yamada: On limit systems for some population models with cross-difusion, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser.B, Vol. 17 (2012), pp. 2745-2769, 査読有.
⑯ Evangelos Latos, Takashi Suzuki and Yoshio Yamada: Transient and asymptotic dynamics of a prey-predator system with diffusion, Math. Methods Appl. Sci., Vol. 35 (2012), pp. 1101-1109, 査読有.

〔学会発表〕（計 8 件）
①Yoshio Yamada: The multiple spreading phenomena for a certain class of free boundary problems of reaction diffusion equations, The 11th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, 2015 年 3 月 13 日，早稲田大学（東京都新宿区）.
② Yoshio Yamada: Logistic diffusion equations with nonlocal effects in population biology, 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2014 年 7 月 8 日，マドリッド（スペイン）.
③Yoshio Yamada: Spreading and vanishing dichotomy for some free boundary problems in population biology, International Symposium on Applied Analysis in Honour of the 65 th Birthday of Prof. Michel Chipot and his Retirement, 2014 年 6 月 11 日、チューリッヒ（スイス）.
④Yoshio Yamada: Asymptotic behavior of solutions for some free boundary problems in population biology, Workshop on New Mathematical Developments Arising in Ecology, Epidemiology and Environmental Sciences, 2013 年 10 月 19 日，北京（中国〉.
⑤Yoshio Yamada: Spreading and vanishing for some free boundary problems in population dynamics, Workshop on Nonlinear Equations in Population Biology, 2013 年 5 月 26 日，上海（中国）.
⑥ Yoshio Yamada: On logistic equations with diffusion and nonlocal effects, Workshop on Nonlocal Problems—in the framework of the EU programme FIRST, 2012 年 12 月 14 日, チューリッヒ（スイス）.
⑦Yoshio Yamada: Free boundary problems for reaction-diffusion equations in ecology, Seminario de Matematica Aplicada, 2012 年 12 月 3 日，マドリッド（スペイン）.
⑧Yoshio Yamada: Spreading and vanishing for free boundary problems in ecology, 5th Polish-Japanese Days on Nonlinear Analysis in Interdisciplinary Sciences—Modellings, Theory and Simulations--, 2012 年 11 月 9 日, 関西セミナーハウス（京都市）.

〔その他〕
ホームページ等
http://www.f.waseda.jp/yamada/

６．研究組織
(1)研究代表者
山田　義雄（YAMADA, Yoshio）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：２０１１１８２５

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
大谷　光春（ÔTANI, Mitsuharu）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：３０１１９６５６
田中　和永（TANAKA, Kazunaga）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：２０１８８２８８
廣瀬　宗光（HIROSE, Munemitsu）
明治大学・理工学部・准教授
研究者番号：５０２８７９８４
中島　主恵（NAKASHIMA, Kimie）
東京海洋大学・海洋科学部・准教授
研究者番号：１０３１８８００
竹内　慎吾（TAKEUCHI, Shingo）
芝浦工業大学・システム理工学部・准教授
研究者番号：００３３３０２１
久藤　衡介（KUTO, Kousuke）
電気通信大学・情報理工学研究科・准教授
研究者番号：４０３８６６０２
若狭　徹（WAKASA, Tohru）
九州工業大学・工学研究院・准教授
研究者番号：20454069
研究者番号：２０４５４０６９
大枝　和浩（OEDA, Kazuhiro）
早稲田大学・グローバルエデュケーションセンター・助教
研究者番号：７０５８０３６４

(4)研究協力者
兼子　裕大（KANEKO, Yuki）