

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 16 日現在

機関番号：34316

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540221

研究課題名(和文) 楕円関数を用いた陽的解表示による形状と大域的分岐構造の研究

研究課題名(英文) Research on profiles and the global bifurcation structure by explicit representation formula using elliptic functions

研究代表者

四ツ谷 晶二 (Yotsutani, Shoji)

龍谷大学・理工学部・教授

研究者番号：60128361

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：楕円関数を用いて微分方程式のすべての候補となる解の表示式を求め、それをもとに大域的分岐構造を凝縮した超越方程式を導き解析するという、独自の手法を深化させさまざまに適用範囲を広げることができた。cross-diffusion方程式については、空間1次元の場合の楕円関数による解表示から示唆を得た。空間多次元の場合の定常解の存在と安定性に関する結果を得た。線形化固有値問題については、Allen-Cahn型の反応拡散方程式の場合に、線形化固有値問題の固有値を決定する固有方程式を発見し、すべての固有値と固有関数の表示式を厳密に求めた。さらに、拡散係数が零に近づいたときの固有値の漸近公式も得た。

研究成果の概要(英文)：We have deepened our original method and extended its range in order to solve various problems for differential equations. We obtain all the candidate solutions and derive transcendental equations equivalent to problems to be solved. Especially, as for a cross-diffusion equation, we obtained the stability of stationary solutions in multidimensional case, which is inspired by 1 dimensional case results obtained by our method. As for linearized eigen-value problems for reaction diffusion equations, we have obtained all exact values of eigen-values and representation formula of eigen-functions which have been thought impossible.

研究分野：大域解析学

キーワード：非線形境界値問題 完全楕円積分 楕円関数 交差拡散方程式 反応拡散方程式 極限方程式 弾性曲線 線形化固有値問題

1. 研究開始当初の背景

(1) 従来、解の存在のための十分条件を求めるとか、局所的な解の分岐構造に対しては、現代的な関数解析的な手法により多くの研究がなされ現在も発展を続けている。しかしながら精密に解の形状を知ることや、解の大域的な分岐構造を完全に解明することは手法的な限界もあり、困難な問題であり僅かの例が知られているだけであった。

(2) 数年前、我々は現代的な手法だけでは取り扱いが困難であった重要で典型的な非線形微分方程式や非局所非線形境界値問題の解を楕円関数を用いて陽的表示式を得る方法を発見した。以来、現代的な手法と組み合わせ、従来未解決であった特異摂動問題の解の精密な陽的表示、さまざまな極限形状の精密な表示、2次分岐等も含めた解の大域的な分岐構造の完全解明を行っている。

(3) 我々の研究の特徴は、最先端の数式処理ソフトで試行錯誤を行い、古典的な楕円関数を用いた解の表示式を求め、さらにそれをもとに大域的な分岐構造を凝縮した超越方程式を導き、それを詳しく解析するという手法を開発し発展させてきたことである。超越方程式は問題により、単独・連立の両方があり、完全楕円積分の商や合成関数がふくまれているため取り扱いが困難ではあるが、それも克服する手段も一歩ずつ開発してきている。

(4) 同時にこの方法は、特異摂動問題のように方程式に含まれるパラメータが零に近づくときの分岐解の極限形状についても、従来の方法では全くとらえることのできない形状を精密にとらえることにも威力を発揮する。これは、超越方程式の解の極限形を調べることに対応する。

2. 研究の目的

従来未解決であった特異摂動問題の解の精密な陽的表示、さまざまな極限形状の精密な表示、2次分岐等も含めた解の大域的な分岐構造の完全解明を行ない。同時に、線形化固有値問題の解の陽的表示式を得、固有値の精密な漸近挙動と固有関数の形状に関する美しく不思議な事実も発見してきた。

それらの事実の数学的な証明には、新しいアイデアと数式処理ソフトを用いた膨大な計算を必要とする。研究目的は発見してきた事実の証明を完成させることである。

3. 研究の方法

以下の問題に焦点をあてて研究をすすめる。

(1) 数理生態学に現れる cross-diffusion 方程式の極限方程式の定常解の大域的構造の完全解明、高次元への拡張、拡散係数が零に近いときの極限形状と時間発展問題の安定性の解明。

(2) 長さ・面積を与えた、平面閉弾性曲線で弾性エネルギー最小極小となるものの大域的な分岐構造と曲率の爆発現象の解明。

(3) 反応拡散方程式の研究において典型的かつ重要な非線形項に対する、線形化固有値問題の固有値・固有関数の具体的な表示式を求めること。さらに拡散係数が零に近づいたときの、固有値の漸近公式、固有関数の極限形状の表示式を得る。

(4) 供給項をもつ Gierer-Meinhardt 方程式の解の大域的な分岐構造と極限形状の解明。

(5) 3種反応拡散方程式の解の構造・挙動を2種 cross-diffusion 方程式の解の大域的な分岐構造・挙動を用いて理解する。

4. 研究成果

上記で述べたことにできる限り対応させて、得られた研究成果を説明していく。

(1) cross-diffusion 方程式について Ni 教授(ミネソタ大・華東師範大学)、Lou 教授(オハイオ州立大)との共同研究によって、空間1次元の場合の楕円関数による解表示から示唆を得た、空間多次元の場合の定常解の存在と安定性に関する結果を論文として発表した。空間1次元の場合の解の多重度については、技術的なネックとなっていた第三種完全楕円積分を取り扱う新たな手法を発見できたので論文を作成にとりかかっている。

(2) 平面閉弾性曲線について

研究分担者松本教授と村井博士の協力を得、面積制約条件付平面弾性曲線の問題の曲率の爆発現象について、国際会議 The 9th AIMS Conference において発表を行ない、これに基づき具体的な計算を実行したものを欧文誌 DCDS Supplement に発表した。この論文で示された楕円関数による解表示は、さまざま状況下での曲率の爆発現象の解析の基礎となるものである。

坂元教授（広島大）、村井博士の協力を得て、長さ・面積を与えた平面弾性閉曲線の全体構造解明の手法を応用して、円周上の微分型シュレディンガー方程式が極めて多様な進行波解を持つことを明らかにし、国際会議 The 11th AIMS Conference において成果発表を行ない、発表内容をもとに具体的な計算を実行したものが欧文誌に掲載決定された。

(3) 線形化固有値問題について

若狭准教授（九州工業大学）との共同研究により、3次の非線形項の典型例である Allen-Cahn型 $f(u) = u - u^3$ の反応拡散方程式の場合に、線形化固有値問題の固有値を決定する固有方程式を得て、拡散係数が零に近づいたときの固有値の漸近公式と論文として発表した。これに基づいて、固有関数の極限形状の表示式に関する論文を作成中である。一見似た非線形項でも固有値と固有関数の分布・形状は著しく異なることを明らかにした。

(4) Gierer-Meinhardt方程式について

生産項をもつ1次元 Gierer-Meinhardt 方程式系の、すべての解が楕円関数を用いて表示できること発見している。これを用い、定常解の大域的分岐構造を決定する超越方程式の解析を行ない、論文の作成している。

(5) 3種系とcross-diffusion方程式について
3種反応拡散方程式の解の構造・挙動を、2種 cross-diffusion 方程式の解の大域的構造・挙動を用いて理解することを目標としてして研究をすすめてきたが、取り扱うべき3種系の中で焦点を絞る必要を痛感して、そのことについて検討を続けているところである。

(6) 研究分担者森田の研究について

森田は空間多次元の双安定な反応拡散方程式の非平面進行波の存在、スペクトル比較、および、全質量が保存される反

応拡散方程式の定常解の安定性を調べることに有用なリャプーノフ関数の構成についての論文を発表した。

(7) 研究分担者二宮の研究について

反応拡散系の解形状を調べるため、特異極限をとった自由境界問題に対する円盤上の回転スポット解の存在を示した。これを用いて2次元平面上の回転スパイラル解の構成に成功した。また、移動性細胞を表現する自由境界問題において、外部刺激が存在する場合に一定速度で移動する細胞領域が存在することを示した。さらに、反応拡散系のさまざまな多次元進行波を構成し論文として発表した。最新の研究成果を含めた単行本「進入・伝播と拡散方程式」を2014年に出版した。

(8) 研究成果の啓蒙活動について

なお、ここ数年間で発見した、非線形微分方程式の解の全体構造を解析する我々独自のの方法の本質を、分野外の研究者や一般の方々にも分かってもらい利用いただけるように、単行本「楕円関数と仲良くなろう」を2013年に出版した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者には下線)
〔雑誌論文〕(計12件)

Y. Lou, W.-M. Ni and S. Yotsutani:
Pattern formation in a cross-diffusion System, Discrete and Continuous Dynamical Systems 35 (2015), 1589-1607. 査読有 DOI:10.3934/dcds.2015.35

T. Wakasa and S. Yotsutani:
Limiting classification on linearized eigenvalue problems for 1-dimensional Allen-Cahn equation I -asymptotic formulas of eigenvalues-, Journal of Differential Equations 258 (2015), 3960-4006. 査読有
DOI: 10.1016/j.jde.2015.01.023

C.-N. Chen, S. Jimbo, and Y. Morita:
Spectral comparison and gradient-like property in the FitzHugh-Nagumo type equations, Nonlinearity, 28 (2015) 1003-1016. 査読有
DOI: 10.1088/0951-7715/28/4/1003

C.-N. Chen, S.-Y. Kung and Y. Morita:
Planar standing wavefronts in FitzHugh-Nagumo equations, SIAM J. Math. Anal. 46 (2014), 657-690. 査読有 DOI: 10.1137/130907793

H. Monobe and H. Ninomiya:
Multiple existence of traveling waves
of a free boundary problem describing
cell motility, *Discrete and Continuous
Dynamical Systems. Ser. B* 19 (2014),
789-799. 査読有
DOI:10.3934/dcdsb.2014.19.789

Y.-Y. Chen, Y. Kohsaka and H. Ninomiya:
Traveling spots and traveling fingers
in singular limit problems of reaction
-diffusion Systems, *Discrete and
Continuous Dynamical Systems. Ser. B*,
19 (2014), 697-714. 査読有
DOI: 10.3934/dcdsb.2014.19.697

M.Murai, W.Matsumoto and S. Yotsutani:
Representation formula for the plane
closed elastic curves, *Dynamical
Systems and Differential Equations
Supplement* 2013. 565 - 585 (2013).
査読有
[http://www.aims.org/journals/
displayPaperPro.jsp?paperID=9240](http://www.aims.org/journals/displayPaperPro.jsp?paperID=9240)

S. Jimbo and Y. Morita: Lyapunov
function and spectrum comparison for a
reaction-diffusion system with mass
conservation, *Journal of Differential
Equations* 255 (2013), 1657-1683.
査読有 DOI: 10.1016/j.jde.2013.05.021

J.S. Guo. H. Ninomiya, and C.C. Wu:
Existence of a rotating wave pattern in
a disk for a wave front interaction
model, *Communications on Pure and
Applied Analysis*, 12(2013), 1049-1063.
査読有 DOI: 10.3934/cpaa.2013.12.1049

J.S. Guo. H. Ninomiya, M. Shimojo, and
E.Yanagida: Convergence and blow-up of
solutions for a complex-valued heat
equation with quadratic nonlinearity,
*Transaction of American Mathematical
Society* 365 (2013), 2447-2467. 査読有
DOI: 10.1090/S0002-9947-2012-05797-7

Y. Morita: Nonplanar traveling waves
of a bistable reaction-diffusion
equation in the multi-dimensional
space, *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, B35
(2012), 1758-1766. 査読有
[http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ken
kyubu/bessatsu/open/B35/pdf/](http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/open/B35/pdf/)

Y.Y. Chen, J.S. Guo, and H. Ninomiya:
Existence and uniqueness of rigidly
rotating spiral waves by a wave front
interaction model, *Physica D*, 241
(2012), 1758-1766. 査読有

DOI: 10.1016/j.physd.2012.08.004

[学会発表](計 17 件)

森竜樹・久藤衡介・辻川 亨・四ツ谷晶二:
Profiles of global bifurcation sheet
and diagrams for a cell polarization
model, 日本数学会年会, 函数方程式分科
会. 2015年3月21日~24日, 明治大学.

森竜樹・久藤衡介・辻川 亨・四ツ谷晶二:
Global bifurcation structure of
stationary solutions to a cell
polarization model, 日本数学会秋季総
合分科会, 函数方程式分科会. 2014年
9月25日~28日, 広島大学.

T. Mori, K. Kuto, M. Nagayama,
T. Tsujikawa, and S. Yotsutani:
Global bifurcation sheet and diagrams
of wave-pinning in a reaction model
for cell polarization, *The 10th AIMS
Conference on Dynamical Systems,
Diff. eq. and Appl.*, Univ. Autonoma de
Madrid, July 7-11, 2014, Madrid, Spain.

M. Murai, K. Sakamoto and S.Yostutani:
Exact solutions for the derivative
nonlinear Schrodinger equation with
periodic boundary condition,
*The 10th AIMS conference on Dynamical
systems, Diff. eq. and Appl.*, Univ.
Autonoma de Madrid, July 7-11, 2014,
Madrid, Spain.

Y.Morita: Gradient-like property and
spectral comparison in a mass
-conserved reaction-diffusion system,
*The 10th AIMS Conference on Dynamical
Systems, Diff. eq. and Appl.*, Univ.
Autonoma de Madrid, July 7-11, 2014,
Madrid, Spain.

Y.-Y Chen J.-S. Guo, H. Ninomiya:
Study of the rotating spiral wave and
rotating spot by the wave front
interaction model, *The 10th AIMS
Conference on Dynamical Systems,
Diff. Eq. and Appl.*, Univ. Autonoma de
Madrid, Madrid, Spain, July 7-11, 2014.

Y.Morita: Existence and stability of
standing wavefronts in FitzHugh
-Nagumo equations, *The 8th European
Conference on Elliptic and Parabolic
Problems, Hotel Serapo, Gaeta, Italy*,
May 26-30, 2014.

森竜樹・久藤衡介・辻川 亨・四ツ谷晶二:
Structure and stability of stationary
solutions to a reaction-diffusion

model for cell polarization, 日本数学会年会, 応用数学分科会. 2014年3月15日~18日, 学習院大学.

森竜樹・久藤衡介・辻川 亨・四ツ谷晶二:
Global bifurcation structure of stationary solutions for cubic nonlinear equations with nonlocal constraint, 日本数学会年会, 函数方程式分科会. 2013年9月24日~27日, 愛媛学大学.

森竜樹・久藤衡介・辻川 亨・四ツ谷晶二:
Structure and stability of stationary solutions to a reaction-diffusion model for cell polarization, 日本応用数理学会, 2013年9月9日~11日, 九州大学.

Y. Morita: Spectral comparison and gradient-like property for some reaction-diffusion systems, Czech-Japanese Seminar in Appl. Math. 2013, 2013年9月5日~8日, 明治大学.

Y. Morita: Spectrum Comparison for Reaction-Diffusion systems, Equadiff 13, Aug. 26-30, 2013, Charles Univ. in Prague, Czech Republic.

S. Yotsutani:
Existence and stability of stationary solutions in the Lotka-Volterra competition with cross diffusion, The 21th Annual Workshop of Diff. Eq., Jan. 18-19, 2013, National Central University, Taiwan.

Y. Morita: Standing front waves of FitzHugh-Magumo system, Swiss-Japanese Seminar, Dec. 17-19, 2012, Inst. Math. Univ. Zurich, Switzerland.

Y. Lou, W.-M. Ni and S. Yotsutani:
Structure and stability of stationary solutions to a cross-diffusion equation, The 9th AIMS Conference on Dyn. Syst. and Diff. Eq. and Appl., July 1-5, 2012, Orlando, Florida, USA.

M. Murai, W. Matsumoto and S. Yotsutani:
Structure and blow up phenomena for plane closed elastic curves, The 9th AIMS Conference on Dyn. Syst. And Diff. Eq. and Appl, July 1-5, 2012, Orlando, Florida, USA.

Y. Morita: Planar standing front waves of FitzHugh-Magumo system, The 9th AIMS Conference on Dyn. Syst. and Diff. Eq.

and Appl, July 1-5, 2012, Orlando, Florida, USA.

〔図書〕(計2件)

二宮広和, 共立出版, 侵入・伝播と拡散方程式, 2014, 200

四ツ谷 晶二・村井 実, 日本評論社, 楕円関数と仲良くなるう, 2013, 179

〔産業財産権〕

出願状況(計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等
<http://www.ryukoku.ac.jp/who/detail/592188/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

四ツ谷 晶二 (YOTUTANI SHOJI)
龍谷大学・理工学部・教授
研究者番号: 60128361

(2) 研究分担者

森田 善久 (MORITA YOSHIHISA)
龍谷大学・理工学部・教授
研究者番号: 10192783

松本 和一郎 (MATSUMOTO WAICHIRO)
龍谷大学・理工学部・教授
研究者番号: 40093314

二宮 広和 (NINOMIYA HIROKAZU)
明治大学・理工学部・教授
研究者番号: 90251610