

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 27 日現在

機関番号：34316

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540222

研究課題名(和文)力学系の位相的・計算的方法の発展

研究課題名(英文)The development of the topological and computational methods on dynamical systems

研究代表者

岡 宏枝(國府宏枝)(Oka, Hiroe)

龍谷大学・理工学部・教授

研究者番号：20215221

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：位相的・計算的方法(全構造計算)は、力学系の数学的解析の問題点を克服するために考案した独自のアプローチであり、その理論をまとめ、例として2次元の離散力学系へ適用した。この方法を用い、典型的な大域的な分岐であるboundary crisisをこの方法を実現するソフトcmgraphで扱い理論的な成果をまとめた。遺伝子発現をモデルとする各変数は抑制・活性を表すだけの区分アフィンで与えられる単純な系であるswitching networkに対してデータベースの構築と理論を展開した。また、時系列データや乱流データの画像データの時系列から全構造計算を行い、そこから得られるMorse分解について考察した。

研究成果の概要(英文)：Topological-computational method (database schema) is our original approach in order to overcome the weak point of the analysis of real dynamical systems. The theory and an application (2-dim'l discrete dynamical system called Leslie model) is discussed in our paper. Also, boundary crisis, which is typical in the global bifurcations is studied in this methods, and obtain a theorem using a notion of chain orbit. A switching network is a simple model for gene regulatory network representing the regulation of proteins, and we study the database of such systems. Moreover we treat the time series data of some gene regulatory network, from which we obtain a Morse decomposition, which is same as the one from a different method. We also study the graphical time series obtained by 3-D turbulence and get some computational results wrt persistence homology.

研究分野：力学系理論

キーワード：力学系 モース分解 大域的構造 時系列 全構造計算

## 1. 研究開始当初の背景

力学系は決定論的な法則に従って時間発展するシステムを数学的に定式化したもので、その対象は数学だけでなく自然科学、工学、社会科学などに現れる多くの興味深い非線形現象を含む。その現象を理解するために考案された数理的モデルは、微分方程式、差分方程式、離散モデルなど多岐にわたり、解析のために様々な数学理論が展開されているが、一方、その非線形性の多様性から計算機による数値シミュレーションが不可欠である。しかしながら数値シミュレーションはあくまで近似計算であり、その結果の数学的解析による証明には限界があり注意深い評価と吟味が必要になる。

これに対し申請者らは、非線形系のダイナミクスの大域的構造やパラメータの変化に伴う分岐を調べる方法として、ホモロジー計算などの位相的方法に精度保証付き数値計算を組み合わせ、数学的に厳密で汎用性のあるアルゴリズムの構築を試みてきた。

## 2. 研究の目的

この研究で扱う位相的・計算的方法のアルゴリズムの概略は以下のとおりである。写像によって与えられる力学系の相空間の有限グリッド分割をとり、各グリッド要素の写像による像の精度保証付き計算に基づく外近似と交わるすべてのグリッド要素を対応させることで、グリッド間の組み合わせ多価写像を構成する。次に、グリッドの頂点からなる集合を考え、各グリッドに対し、そのグリッドの組み合わせ多価写像の像全てに向かう辺を考えることで、組み合わせ多価写像を有向グラフとして表す。この有向グラフから、グラフ・アルゴリズムとホモロジー計算などを含む位相的な情報を計算することで、Morse 分解と各 Morse 集合の Conley 指数が得られ、それを Conley Morse graph という簡明な表現にまとめることで、元の力学系のダイナミクスについての数学的に厳密なさまざまな結果を得ることができる。ある力学系のパラメータ族に対し、その力学系のデータベース化とは、パラメータ空間についてもグリッド分割を行い、各パラメータグリッドごとに対応する力学系の Conley-Morse graph を計算して、その結果を検索可能な形に集約したものをいう。このような位相的・計算的方法は cmgraph と呼ぶソフトウェアとして実装しており、対象とする力学系の不動点や周期解などの個々の軌道の解析を前提とせず、力学系を定義する数理的表現だけから、ほぼ自動的に計算できる。

ここでは、(1)位相的・計算的方法によって得られる情報から、どのように元の力学系のダイナミクスや分岐を理解するかについての理論的基礎の構築、(2)位相的・計算的方法によって得られた Morse 成分の内部構造を解析できるようにこの方法を発展させる、(3)更に、位相的・計算的方法で扱える力学

系の範囲を拡大することを目的にして研究した。これらはいずれも、様々な力学系に現れる複雑な現象を理解するための位相的・計算的方法の有効性を探る意味で互いに密接な関係がある。

## 3. 研究の方法

計算機で様々な方法を試行しながら、方法と理論を構築し、研究目的で述べた次の3つの課題について相互の関連を見ながら研究する。

(1)力学系の位相的・計算的方法による分岐問題の理論的アプローチ：位相的・計算的方法の特徴は、相空間やパラメータ空間をグリッド分割しそれらの組み合わせ的な表現やトポロジーなどの情報から力学系の情報を得ることであり、従来の力学系論的な扱いとは異なる議論が必要となる。例えば、不動点の特異性がどのような分岐を引き起こすかを決めるという組織中心的な扱いができない。むしろ、異なるパラメータ値に対する力学系の Conley Morse graph が異なるとき、そのパラメータの間でどのような分岐が起こるかを議論するように(たとえ局所的な場合であっても)本質的に大域的な分岐を論じる必要がある。また、有限サイズのグリッド分割に由来するパラメータのグリッド・サイズと相空間のそれとの関連性や、サイズを小さくしたときの収束性の問題もある。この観点からサドル・ノードのような codim 1 の単純なもののみでなく複雑な場合の分岐についても考察を進める。

(2)複雑な構造を持つ不変集合の内部構造の解析：Morse 成分としての回帰的不変集合(の外近似)の内部構造を解析する方法を開拓する。力学系がカオス的であるなど複雑な内部構造を持つ場合や、位相計算において計算量の制約などのために相空間の初期分割を十分に細かく取れない場合などでは、得られる Morse 成分が大きく、その内部に複数の不変集合からなる非自明な内部構造を持つことが頻繁に起こる。そのような場合には、得られた個々の Morse 成分の内部構造を調べることが本質的に重要になる。このためのアルゴリズムとそれを支える理論の構築を目的とする。

(3)適用できる力学系の拡張(ノイズを含む系・時系列解析)：ここでいう時系列解析は、未知の力学系から生成された時系列データから、力学系の有向グラフを構成し、それに対して、グラフ・アルゴリズムや Conley 指数などの位相不変量を用いて元の力学系の情報を得ようとするものである。従来の時系列解析は時系列データの遅れ座標からアトラクタを再構成し、その次元から埋め込みかどうかを判定するものであるが、埋め込みの次元によらない位相的な結果を目指すため、新しい理論の展開が必要となる。この手法は、グリッド分割の大きさや解像度をどのように決めるかが重要な鍵であり、ノイズの入っ

た系(ランダム力学系)をこの方法でどのように扱うかとも密接に関わっている。

#### 4. 研究成果

(1)位相的・計算的方法は、従来の力学系の数学的解析の問題点を克服するために考案した独自のアプローチであり、2次元の離散力学系の2-パラメータ族である Leslie model に適用し、その結果を含めて理論を論文(研究業績[\*1])にまとめている。

(2)元の力学系のダイナミクスや分岐の理解について：大域的な分岐構造として重要なものとして、バウンダリー・クライシス、インテリア・クライシスが、位相的・計算的方法を実現するソフト cmgraph でどのように扱われるか、また、それに関する理論的な成果として不変集合間のイプシロン擬軌道の存在という形で定式化した(論文[1])、この他に、局所的な分岐として重要であるサドル・ノード分岐に関して理論的な結果を得ている(論文[2])。また、パラメータ空間のある点の周りに1周するとき、cmgraph の出力としては分岐が起こってないが、不変集合間の入れ替わりが起こる現象(「モノドロミー」と名付けた)について、具体例の構成と1周するループの中に分岐集合が存在することを covering homotopy property を用い示し研究集会で発表した(口頭発表[6])。

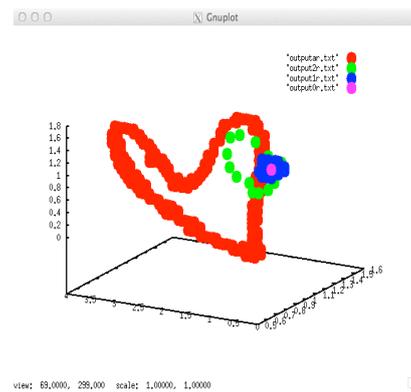
(3)switching network:ここで switching network と呼んでいるのは遺伝子発現をモデルとする微分方程式系で、各変数は抑制・活性を表すだけの piecewise-affine で与えられる単純な系である。そのような系に現れる不変集合とその位相的タイプが、相空間の系の非連続な部分の集合である超平面での系のタイプで決定されることに注目しその分類をした。これに関する論文は Physica D に投稿し、近日中に出版される予定である。([\*2]現在、レフリーからの指示で書き直し中。)これには、系を滑らかな微分方程式系に摂動したときの大域構造(不変集合のモース分解)の考察の部分も含まれる。また、これらの枠組みを高次元に拡張するための、よりアルゴリズムを考慮した定式化を S.Harker を交えて議論をしており現在論文執筆中である。

[\*1]Z. Arai, W. Kalies, H. Kokubu, K. Mischaikow, H. Oka, P. Pilarczyk, "A database schema for the analysis of global dynamics of multiparameter systems", SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 8, 757-789 (2009).

[\*2]T. Gedeon, S. Harker, H. Kokubu, K. Mischaikow, and H. Oka, "Global dynamics for steep sigmoidal nonlinearities in two dimensions"

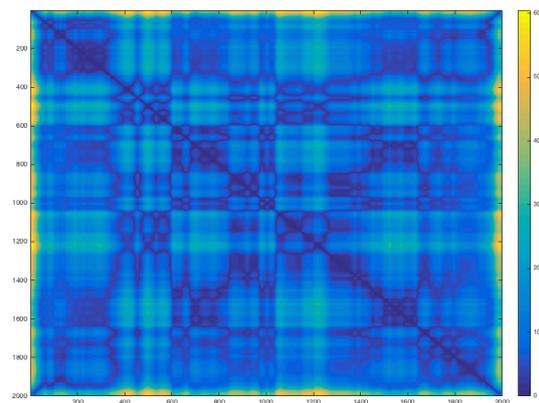
(4)time series の Morse 分解について (B. Fiedler, A. Mochizuki 他と共同研究) 遺伝子発現をモデルとするネットワークを念頭

に置いたある一般的な条件を課した微分方程式系を考える。データに関するいくつかの条件を満たせば、time series data から directed graph を構成しそこから得られる Morse 分解が、元の微分方程式系の Morse 分解の細分と出来ることを示した。また、Mirsky のサーカディアンリズムのモデルに対して、その time series data から global attractor のモース分解についてシミュレーションを行い、不安定集合を含めたモース分解の結果が auto 等の他の手段の結果と一致することを示した。(図1)これに関しては、研究業績(口頭発表[1],[2]等)で発表し現在論文執筆中である。



【図1】

(5)乱流データのパーシステント・ホモロジーによる解析：気象パターンの時系列や乱流のデータの時間発展を位相的方法であるパーシステント・ホモロジーを用い解析する計画は東北大学の M. Kramar、University of Sao Paulo の M. Gameori 氏とともに、速度場のパーシステンス・ホモロジーの計算結果をえた。(図2は乱流データの壁からの距離の速度ベクトル)



【図2】

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件) 査読有

[1] Hiroshi Kokubu and Hiroe Oka, A

topological computation approach to the interior crisis bifurcation, *Nonlinear Theory and its Applications IEICE*, Vol. 4, No. 1 (2013), 97-103. doi: 10.1587/nolta.4.97

[2] Zin Arai, Marcio Gameiro, Tomas Gedeon, Hiroshi Kokubu, Konstantin Mischaikow, Hiroe Oka, Graph-based topological approximation of saddle-node bifurcation in maps. *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, B 31, (2012), 225-241.

[学会発表] (計7件)

[1] 岡宏枝, 遺伝子ネットワークの時系列を用いたモース分解, 武蔵野大学・明治大学・龍谷大学合同シンポジウム, 2016年2月10日~2月11日 龍谷大学瀬田学舎(滋賀県大津市)

[2] H. Oka, Morse decomposition of regulatory networks via determining nodes, Fall Eastern Sectional Meeting, November 14-15, 2015 (Saturday - Sunday) Meeting #1115, Rutgers University (New Brunswick, NJ, USA)

[3] H. Oka, 遺伝子ネットワークの時系列解析, 2014年3月10日~2014年3月14日, RIMS 研究集会 力学系理論の諸分野への応用の新展開, RIMS, 京都大学 (京都府京都市)

[4] H. Oka, Detecting Morse Decompositions of the Global Attractor of Regulatory Networks by Time Series Data, 2014年2月10日~2014年2月14日, workshop: Algebraic Topology in Dynamics, Differential Equations, and Experimental Data, Univ. of Minnesota, IMA (USA)

[5] H. Oka, Algebraic Topology in Dynamics, Differential Equations, and Experimental Data, 2014年1月10日~2014年1月13日, 2013年度冬の力学系研究集会, 広島大学東千田キャンパス 302 講義室(広島県広島市)

[6] H. Oka, Bifurcations of Conley-Morse graphs: Crisis and Monodromy (poster), The First International Conference on Dynamics of Differential Equations Georgia Institute of Technology, March 15-20, 2013 (Atlanta, USA)

[7] H. Oka, Topological crisis bifurcation International Conference "Dynamical Systems: 100 years after Poincaré", September 3-7, 2012 (Gijon, Spain)

[その他]

ホームページ

<http://www.math.ryukoku.ac.jp/~oka/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

岡 宏枝 (国府 宏枝)  
(OKA, Hiroe (KOKUBU, Hiroe))  
龍谷大学・理工学部・教授  
研究者番号: 20215221

### (2) 連携研究者

国府 寛司 (KOKUBU, Hiroshi)  
京都大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 50202057

荒井 迅 (ARAI, Jin)  
北海道大学・理学系研究科・准教授  
研究者番号: 80362432