

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 23 日現在

機関番号：12101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24540247

研究課題名(和文)トポロジカル絶縁体の場の理論と素粒子の統一模型の研究

研究課題名(英文) Investigation of the field theories for topological insulators and unified models of elementary particles

研究代表者

藤原 高德 (Takanori, Fujiwara)

茨城大学・理学部・教授

研究者番号：50183596

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：トポロジカル絶縁体はパラメータの連続変形に対して安定なギャップを持つ絶縁体で、バルクなトポロジカル絶縁体はCern数と呼ばれる位相不変量で特徴づけられることが知られている。有限なトポロジカル絶縁体では特有のエッジ状態が絶縁体表面に現れてギャップが閉じる。この現象を場の理論的に理解し、素粒子の統一模型への応用の可能性を探るために、周期的なトポロジカル絶縁体の格子模型を考案し、外部電磁場に対するエネルギー固有値のレスポンスを調べた。また、場の理論との比較を行うために、一様に磁化されたトーラス上のDirac演算子のスペクトルの解析を行い、ゼロ・モード解の厳密な構成方法を与えた。

研究成果の概要(英文)：Topological insulators have a gap that is stable under continuous deformation of parameters. It is known that a bulk topological insulator is characterized by a topological invariant called such as the Chern number. In finite topological insulators there appear characteristic edge states at the surface and the gap closes. To get insight into the phenomena and seek for possible application to unified theories of elementary particles we have introduced periodic lattice models of topological insulators and investigated the response of energy spectra with applied electromagnetic fields. To compare field theoretical approaches we have also studied the eigenvalue problem for Dirac operators on uniformly magnetized tori in arbitrary dimensions and give a construction of exact zero-mode solutions.

研究分野：素粒子論と場の理論

キーワード：場の理論 トポロジカル絶縁体 量子異常 格子模型 位相不変量 指数定理 エネルギー固有値 一様磁場

### 1. 研究開始当初の背景

ボータックスやモノポール、インスタントン、Skyrmion などのトポロジカルな物体は素粒子模型の統一模型の構築や場の理論の非摂動的アプローチで重要な役割を果たしてきた。特に、クォークやレプトンの質量が何故 GUT スケールのエネルギーと比較して小さいのかという問題は、余剰次元のゲージ場やヒッグス場のトポロジカルな配位が深く関係していると考えられている。4次元時空とコンパクトな余剰次元の直積で表される高次元理論では、フェルミオンの質量演算子が、余剰次元上のゲージ場のトポロジカルな配位に対して0でない指数を持たせることで、クォーク/レプトンのようなカイラルフェルミオンを実現する。これに対し、ゲージ-重力対応で想定されているような時空、我々の棲む時空がより高次元のバルクな空間の境界と考えるアプローチでは、バルクのダイナミックスの結果として境界上にカイラルフェルミオンが出現するという、従来とは異なった模型構築の可能性が考えられる。近年、凝縮系物理で物質の新しい状態としてトポロジカル絶縁体が注目されているが、そこで起きている現象は絶縁体の表面にギャップレスのフェルミオン状態の出現である。

### 2. 研究の目的

渦やモノポールなどの位相欠陥は素粒子の統一模型や高密度 QCD、凝縮系物理でユニークな役割を果たす。トポロジカル絶縁体で起きている物理、バルクのダイナミックスと0質量 Majorana 状態の出現の機構は、素粒子模型への応用が期待される。位相欠陥を背景場とする BdG 方程式にゲージ場を導入した系は、ゲージ-ヒッグス場がフェルミオンと相互作用する系として記述される。この研究の目的は、トポロジカル絶縁体から場の理論の模型を抽出し、トポロジカル絶縁体で起きている物理、バルクのダイナミックスと0質量フェルミオンの出現の機構を場の理論の模型で解析し、素粒子の統一模型への適用の可能性を明らかにすることである。それにより、素粒子の統一模型や凝縮系の理解に新たな知見が得られると期待される。

### 3. 研究の方法

トポロジカル絶縁体とは、位相不変量によって特徴付けられたバンド絶縁体で、ギャップレスの表面状態をもつ物質である。よく知られた例として2次元量子ホール効果を挙げることができる。量子ホール系はホール伝導度が TKNN integer で特徴付けられ、ホール伝導体の縁でホッピングしながらホール伝導に関与するギャップレスのカイラルモードが現れる。最近では、particle-hole 対称なトポロジカル絶縁体に、位相的な秩序変数で特徴付けられるボ

ータックスやモノポール型の格子欠陥があると、表面だけでなく格子欠陥に束縛された Majorana 型のギャップレスモードが現れ、系のバルクな振舞に重要な役割を果たすことが分かっている。

トポロジカル絶縁体などの系のフェルミ面近傍での振舞は、励起準位のエネルギーに対する固有値方程式記述され、Bogoliubov-de Gennes (BdG) 方程式と呼ばれる南部-Gorkov 形式で表された1粒子波動関数をもちいて書かれた BdG 方程式は相対論的な Dirac 方程式と類似した方程式となっている。トポロジカル絶縁体内部の位相欠陥は空間的に変化するオーダーパラメータによって記述され、場の理論でのヒッグス場に対応する。相対論的な場の理論ではスカラー場と Dirac 場との相互作用(Yukawa 結合)はカイラル対称性を破るが、BdG 方程式では particle-hole 対称性のために、カイラル対称性をダブリングさせた対称性(拡張されたカイラル対称性)を持つ。系のハミルトニアン  $H$  は拡張されたカイラル行列と反可換となる。エネルギーが0の状態は固有状態に選べ、固有値の正負で0エネルギー状態を分類することができる。正固有値の0エネルギー状態の個数と負固有値の0エネルギー状態の個数の差として定義された  $H$  の指数はゲージ場やオーダーパラメータの連続変形に対して不変で、位相的な保存量となっており、ゲージ場やオーダーパラメータで定義される位相不変量と関係付けることができる。これは相対論的な場の理論では Atiyah-Singer の指数定理として知られている。われわれは、これまでの研究で従来の指数定理を BdG ハミルトニアンに適用できるように拡張し、任意の次元で指数をオーダーパラメータの位相不変量の関係を明らかにし、ボータックスモノポール型の位相欠陥に束縛されたカイラルな0モードが現れることを具体的に確かめる。

位相欠陥がある場合は0でない指数が実現し、位相欠陥に束縛されたギャップレス状態が現れる。この状態は位相欠陥に沿って伝搬し、位相欠陥上に0質量の有効場理論が定義できる。我々の棲む時空をバルクの絶縁体の表面や位相欠陥で置き換えることで、素粒子の統一模型の新たなアプローチの可能性を明らかにしたい。そのために、トポロジカルな絶縁体のバルクや表面、位相欠陥で起きている物理のより明確な場の理論的記述が求められる。量子ホール伝導体やスピンホール伝導体などで起きている現象を素粒子模型に適用できるように場の理論の形式に整備し、表面や位相欠陥に束縛された状態に対する有効理論を与える方法を確立したい。

凝縮系の新たな状態として理解されるようになったトポロジカル絶縁体の物理から場の理論として普遍的に成り立つ現象を抽

出して、素粒子の模型に適用しようという試みは新しいものとする。クォーク/レプトンの質量の起源やゲージ対称性の自発的破れについて、新しい理解が得られる可能性がある」と期待される。

#### 4. 研究成果

以下は、平成 24 年度から平成 28 年度の 5 年間に行った研究成果を研究項目毎にまとめたものである。

[1] 一様に磁化されたトーラス上の Dirac 演算子に対する固有値問題

トポロジカル絶縁体の格子模型では一様磁場に対するハミルトニアン固有値の分布と磁場を変化させるときの各固有値のレスポンスをすることが重要である。一様に磁化された 2 次元格子上的電子系の模型は tight-binding 模型で記述され、エネルギー固有値はバタフライ図として示された分布を持つ。この系においてその大きさを有限に保ちながら連続極限を取ると一様磁場を背景とする 2 次元トーラス上を運動する電子の系に帰着する。これに着目して我々は任意次元の一様に磁化されたトーラス上の Dirac 演算子の固有値問題を詳細に研究した。

トーラス上の場に対しては一般に周期境界条件が課されるが、一様磁場に対する電磁ポテンシャルは周期境界条件を満たすことができない。電磁ポテンシャルはトーラスの周期に対する座標の並進に対して位相的なゲージ変換だけ変化し、それを吸収するために波動関数には twist された周期境界条件課さなければならない。場の理論としても非常に興味ある研究対象で、われわれは任意次元の平坦なトーラスで最も一般的なものを想定し、任意の一様磁場がある場合の Dirac 演算子の固有値問題の解析を行った。われわれは、Dirac 演算子に対する固有値問題を調べ、固有値を求め、対応する固有状態を基底状態の波動関数(ゼロモード)から構成する方法を与えることができた。

有限系における磁場の著しい性質は、磁場を連続的に変化させることができず、一様磁場は離散化され、整数によって分類される位相的な意味を持つようになる。Dirac 演算子はカイラルなゼロモードを持つ。出現するゼロモードの個数は Atiyah-Singer の指数定理にしたがう。われわれは、トーラスの幾何学的性質に着目し、twist された周期境界条件を満たすゼロモード波動関数を構成する方法を与え、Riemann のゼータ関数による表式を与えた。

トーラス上の場の理論のさらに興味ある性質はエネルギーなどの物理的観測量がトーラス座標の変更に依存しないことである。われわれは、Dirac 演算子の固有値がトーラス座標の変更にに対して影響を受けないことを確かめた。また、一様磁場の配位に応じて現れるゼロモードの個数は決まっているが、ゼロモード波動関数の具体的な形はトーラス座標の変更にに対して不変ではなく、

もとのゼロモード波動関数の線形結合で表される。われわれは一般的なトーラス座標の変更に伴うゼロモード波動関数の変換性を調べ、変換係数を完全に決定した。この結果をもちいることで、トーラス座標の変更に對する Riemann のゼータ関数の変換性を一般的に与えることができる。

[2] Yang-Mills-Higgs 場と結合したトポロジカル超電導体に対する一般化された指数定理

Yang-Mills-Higgs 系は vortex や monopole など位相的に非自明な場の配位を有限エネルギー解として持つ。トポロジカル超伝導体に対する Dirac タイプの Bogoliubov-de Gennes 方程式に Yang-Mills-Higgs 系を結合させた理論は、particle-hole 対称性のため、通常のカイラル対称性を拡張した対称性を持つ。われわれは、この拡張されたカイラル対称性に着目し、Bogoliubov-de Gennes ハミルトニアンのカイラルゼロモードに対する指数定理を調べた。Higgs 場と Yang-Mills 場が共存する系では、トポロジカルな不変量を Higgs 場が担うのかそれとも Yang-Mills 場が受け持つのかという任意性がある。われわれは、Bogoliubov-de Gennes ハミルトニアンの指数を計算し、それが Higgs 場の無限遠での振る舞いから完全に決定されることを示した。また、Higgs 場の位相不変量と Yang-Mills 場のその間の関係を任意次元で調べ、両者の等価性を一般次元で明らかにした。

[3] 一様に磁化された八ニカム格子模型の研究

Haldane の八ニカム格子模型はトポロジカル絶縁体の模型として大変興味深い。この模型は有限のギャップが開いた 2 枚のバンドを持つが、波動関数を Brillouin ゾーン全域に広げようとするコーナ点で特異性が現れる。そのため、Brillouin ゾーンを分けてそれぞれで波動関数を求め、境界で貼り合わせることでバンド波動関数が定義される。この模型がトポロジカルであることは、バンド波動関数をもちいて Berry 接続を求め、Chern 数を計算すると 0 でない結果が得られることから分かる。われわれは、Haldane の八ニカム格子模型に対して磁場を導入し、数値的手法でエネルギー固有値の分布を調べた。(図 1) 図から分かるようにエネルギースペクトルに特徴的なギャップが現れる。また、固有値の個数を調べると固有値の個数が磁場とともに不連続に変化していることが分かる。これを詳しく調べるために、われわれは磁場を連続的に変化させることができるように格子ハミルトニアンを改良し、エネルギー固有値を磁場の関数として数値的に調べた。(図 2) 特徴的なことは磁場を連続的に変化させることでギャップ間を移動するエネルギー固有値が現れることで、エネルギー固有状態に複雑な組み替えが起きる

ことが明らかになった。

われわれは、八ニカム格子と類似したスペクトルを持つ正方格子上的エルミート化された Wilson-Dirac ハミルトニアン の模型を導入し、エネルギー固有値、各ギャップの Chern 数を数値的に解析し、spectral asymmetry が量子 Hall 効果における Streda formula として解釈できることを確かめた。

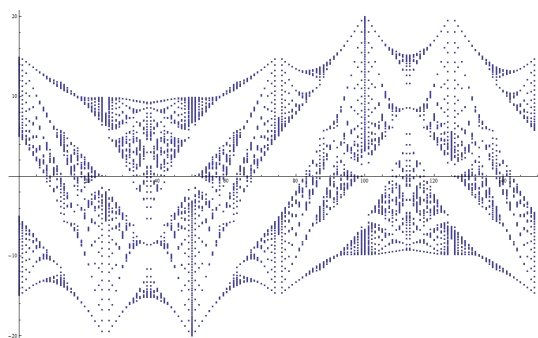


図 1

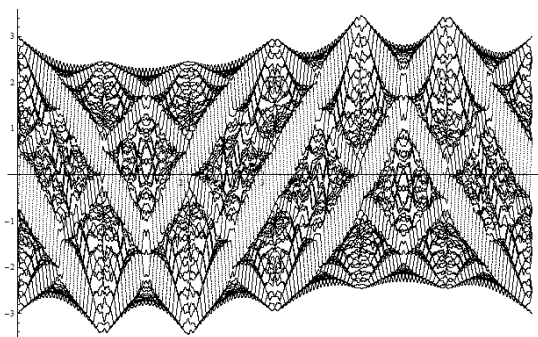


図 2

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 2 件)

1 T. Fukui and T. Fujiwara, Journal of Physical Society of Japan **85**, 124709 (2016) (査読有)

2 T. Fujiwara and T. Fukui, Physical Review **D85**, 125034 (2012) (査読有)

〔学会発表〕(計 4 件)

1 津田廉, 藤原高德, 「Expanding Polyhedral Universe in Regge Calculus」, 日本物理学会 第 72 回年次大会 (阪大, 2017 年 3 月 17 日-20 日)

2 福井隆裕, 藤原高德, 「2 次元・4 次元の Hofstadter-Wilson-Dirac 模型と Streda 公式」, 日本物理学会 第 72 回年次大会 (金沢大, 2017 年 3 月 17 日-20 日)

3 福井隆裕, 藤原高德, 塩崎謙, 藤本聡, 「ディラック的ハミルトニアンに対するバルク・エッジ対応: 指数定理の視点から」, 日

本物理学会 秋季大会 (横浜国立大, 2012 年 9 月 18 日-21 日)

4 藤原高德, 福井隆裕, 新田宗土, 安井繁宏, 「カラー超伝導の非可換渦糸中におけるゼロモード」日本物理学会 第 67 回年次大会 (関西学院大, 2012 年 3 月 24 日-27 日)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況 (計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

〔その他〕  
ホームページ等

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

藤原高德 (FUJIWARA TAKANORI)

茨城大学・理学部・教授

研究者番号: 50183596

##### (2) 研究分担者

( )

研究者番号:

##### (3) 連携研究者

( )

研究者番号:

##### (4) 研究協力者

( )