

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 15 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540265

研究課題名(和文) Mブレインと量子可積分系

研究課題名(英文) M-brain and quantum integrable system

研究代表者

菅野 浩明 (Kanno, Hiroaki)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：90211870

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：4次元ゲージ理論のインスタントンの数え上げから定義される母関数(ネクラソフ分配関数)と共形場理論における共形ブロックとの対応関係である AGT 関係式に関する研究を行った。この関係式はネクラソフ分配関数を共形場理論側で定義される特別な状態の内積として表わすことができることを予言するが、4次元 SU(3) 超対称ゲージ理論が物質場を含む場合、この特殊な状態の定義関係式がどのような変更を受けるか明らかにした。また、この結果を、共形場理論が定義されるリーマン面上で確定特異点が2つ合流して不確定特異点が生じた結果として記述することができた。

研究成果の概要(英文)：We investigated the AGT relation which claims the correspondence between the generating function (Nekrasov partition function) of instanton counting of 4 dimensional gauge theory and the conformal block of 2 dimensional conformal field theory. The AGT relation predicts that we can express the Nekrasov partition function as the inner product of special states on conformal field theory side. We showed how the defining relations of these special states change, when there are matter fields in 4 dimensional SU(3) supersymmetric gauge theory. We also succeeded in describing the defining relations as a result of arising an irregular singularity from the confluence of two regular singularities on the Riemann surface on which conformal field theory is defined.

研究分野：数理物理学

キーワード：AGT 関係式 超対称ゲージ理論 ネクラソフ関数

1. 研究開始当初の背景

1990年代後半に弦理論の双対性に関する理解が大きく進展し、D ブレインの存在がクローズアップされるとともに、摂動論的に無矛盾な5種類の超弦理論が(11次元超重力理論とともに)1つの理論に統一されるという予想がなされた。この(仮想的な)理論はM理論と呼ばれているが、弦理論のより深い理解のためには、弦双対性の背後にあるM理論の理解が不可欠である。

M理論の基本的構成要素は互いに双対関係にあるM2ブレインとM5ブレインであると考えられているが、現時点でM理論そのものを直接扱いことは非常に難しい。技術的に可能な1つの方法はそれらの世界体積上の超共形場理論を考えることであり、これは世界面上の超共形場理論を用いて弦理論を記述する方法の一般化である。M2ブレインを記述する3次元超共形場理論についてはいくつか提案がなされてきたが、現在、最も有力と考えられているのはいわゆるABJMモデルである。これは物質場と結合したクイバー型の超対称Chern-Simons理論であり、超対称理論の局所化公式を用いてChern-Simons型の行列模型として定式化することができ、可積分系の手法を用いた解析が可能である。

一方M5ブレインを記述する6次元超共形場理論に対しては原理的にラグランジアンを用いた記述ができないことが障害となっていた。しかし、近年のGaiottoらによる結果を契機とする一連の進展により、この状況に改善が見られるようになった。申請者は、これまで江口徹氏および連携研究者の栗田氏とM理論のカラビ・ヤウコンパクト化から得られる5次元のゲージ理論とインスタントン分配関数(Nekrasov分配関数)に関する研究を進めてきたが、Gaiottoらの結果によりM理論とインスタントン分配関数の関係について新たな観点が導入された。すなわちM理論そのものではなくM5ブレイン上の6次元超共形場理論を考えることにより4次元インスタントン分配関数と2次元共形場理論に関係が付くことが提唱された。これはAGT予想と呼ばれている。この予想は数学的に見て非常に非自明なものであるが、いくつかの例では証明がなされており、数多くの具体例でチェックがなされている。その成立はラグランジアンを用いた記述ができないにもかかわらず、M5ブレイン上の超共形場理論の存在を強く支持するものである。AGT予想により謎の多いM5ブレイン上の6次元超共形場理論を2次元共形場理論を用いて研究する道が拓かれた。

弦理論の摂動的な定式化として世界面(リーマン面)上の2次元超共形場理論は可積分系の理論と密接な関係をもっていた。以上のような近年の進展はM2ブレインやM5ブレインの世界体積上で定義される高

次元超共形場理論についても可積分系の方法が有効であることを示している。

2. 研究の目的

M理論の大きな特徴の一つは展開パラメータを持たないことであり、その力学は本質的に非摂動的である。本研究では対称性を非摂動的に捕らえることが可能な量子可積分系の厳密解を手がかりとしてM理論の基本構成要素であるM2ブレインとM5ブレインの力学を探索する。これを標語的に言えば「M理論のトイモデル」となる可解模型の探求である。より具体的にはM理論のトイモデルとなる可解模型を見つけ、その分配関数を厳密計算することによりM理論に特徴的な分配関数とは何かという問に答える。M理論は網の目のように張り巡らされた弦理論の双対性を統一していると考えられている。「M理論のトイモデル」とは、このような網の目のように張り巡らされた双対性を可解模型として実現しているという意味である。これが非現実的なものではないことは、似たような現象が位相的なゲージ理論や弦理論の分配関数で観測されていることから示唆される。すなわち、位相的理論の分配関数の計算では、一見異なる由来をもつ数多くの量子位相不変量が実は弦理論の双対性で結びついている。これを手がかりにすれば、目指す可積分系は行列模型やスピン鎖模型の類似、あるいは一般化という形で実現できると期待される。

厳密解を求めることが可能な可解模型は、現実の物理系のトイモデルとして摂動論では解析が困難な「力学」に関する知見を得るためにしばしば有効である。歴史的には統計力学におけるイジング模型が磁性体の相転移のメカニズムを明らかにした可解模型として有名である。場の量子論における例としては、素励起としての粒子とソリトン解の双対性を実現している2次元サイン・ゴールドン模型が挙げられる。その厳密解から得られた知見は4次元ゲージ理論におけるソリトン解としてのモノポールや、弦理論におけるソリトン解としてのDブレインを理解するため大きな助けとなっている。M理論の特徴を捕まえるためには、非摂動的な分配関数の計算が不可欠であり、その意味で位相的理論や可解模型の持つ意味は大きい。M2ブレインあるいはM5ブレインの世界体積上の超共形場理論からM理論における双対性のトイモデルとなる可解模型を構成することができればM理論の背後にある対称性の理解が大きく進展することになる。

3. 研究の方法

(1) 連携研究者との共同研究
プロジェクト開始時は、申請者が栗田らと行った最近の共同研究および森山が藤氏、平野

氏と行った共同研究を出発点とする。このうち申請者が栗田らと行った最近の共同研究では AGT 予想を動機として、面演算子がある場合の AGT 予想について研究した。ゲージ理論の真空構造の秩序パラメータとしてウィルソンのループ演算子がよく知られているが、面演算子はその高次元の拡張である。さらに超対称ゲージ理論における面演算子は超対称性を半分破る BPS 演算子であり $N=2$ 超対称ゲージ理論から $N=1$ 超対称ゲージ理論を得ることができる。本研究課題の観点からは面演算子は $M5$ ブレイン上の 6 次元超共形場理論の欠陥として実現され、直接捉えることの難しい 6 次元理論の対称性の相構造の探針として重要な意味をもつ。栗田は山田氏との共同研究で AGT 予想を 5 次元ゲージ理論および行列模型の観点から研究しており、これに理論の欠陥としての面演算子を加えた場合の研究を行う。とくに申請者が最近、立川氏と行った共同研究を踏まえ、 W 代数の観点から $M5$ ブレイン上の 6 次元超共形場理論の対称性に関する理解を深める。一方、森山は ABJM 模型の分配関数を行列模型と位相的弦理論の手法を用いて計算し、Airy 関数が現れることを示している。これは本研究の基本的課題である M 理論的分配関数とは何かという問に対する興味深い示唆を与えている。しかし森山らの計算はインスタントン補正を無視したものであるので、インスタントン効果が分配関数にどのような影響を及ぼすか研究する。

(2) 定期的セミナーのテーマ

上に説明した申請者と栗田の共同研究および森山らの研究はそれぞれ $M5$ ブレイン、 $M2$ ブレインの世界体積上の 6 次元理論、3 次元理論と関係するものであり対象が異なっている。しかし、分配関数の計算の技術的手法として行列模型が重要な役割を果たしている点で共通する部分が多い。したがって定期的開催するセミナー（年に 4 回程度）と勉強会（年に 1 回程度）のテーマとして行列模型を取り上げる。これは、現在、名古屋大学の弦理論に関係する研究者が 2 週間に 1 回の割合で行っているセミナーの一部として開催することを想定している。また勉強会は講義などがない夏休み期間中、あるいは年度末に実施する。

(3) 国際的研究交流

申請者は、昨年度より SISSA (Trieste) の研究グループ (U. Bruzzo, S. Bonelli, A. Tanzini), およびモスクワの ITEP の研究グループ (A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov ら) との研究交流を行っている。この研究課題の期間中、これらの国際交流を継続する。とくに ITEP のグループは行列模型と可積分系の研

究に関しては世界でもトップクラスの水準にあり得るものは大きい。また SISSA のグループとはインスタントン計算の技術的な側面で議論ができると期待している。連携研究者との議論やセミナーの開催を踏まえて平成 25 年度に海外を含む数人の研究者 (N. Drukker, M. Marino, A. Marshakov などの候補者から 1~2 名) を招聘し共同研究を念頭に置いたミニ・ワークショップを開催する。

4. 研究成果

(1) 基本表現に従う物質場を含むゲージ理論の AGT 関係式と Whittaker ベクトル [雑誌論文 (3)]

4 次元超対称ゲージ理論の M 理論的構成法から予想される対応関係である AGT 関係式とは 4 次元ゲージ理論側でインスタントンの数え上げから定義される母関数 (Nekrasov の分配関数) と共形場理論における共形ブロックとの対応である。この関係式は分配関数を共形場理論側で定義される特別な状態 (Whittaker ベクトル) の内積として表わすことができることを示す。4 次元超対称ゲージ理論に基本表現に従う物質場を入れた場合、物質場がない場合に比べて Whittaker ベクトルの定義関係式がどのような変更を受けるか $SU(3)$ 理論を例として調べた。通常 Whittaker ベクトルは対応する共形場理論のカイラル代数の低次の生成元の同時固有状態として特徴づけられるが、物質場を入れた場合は、それらの生成元の一部が固有値に関する 1 階微分作用素として Whittaker ベクトルへ作用することを見出した。

(2) Argyres-Douglus 型超共形場理論との関係 [雑誌論文 (2)]

(1) で得られた Whittaker ベクトルの定義関係式は共形場理論でプライマリー場に対応するリーマン面上の確定特異点が 2 つ合流して不確定特異点が生じた結果として理解される。この見方に立って 3 つ以上の確定特異点の合流から得られる状態について調べ、それらが 4 次元ゲージ理論側では Argyres-Douglus 型と呼ばれる特殊な超共形場理論と対応することを示した。

(3) 2 重周期モノポール解のモジュライ空間上の超ハイパー計量 [雑誌論文 (1)]

2 重周期をもつモノポールの低エネルギー散乱を記述する有効シグマ模型のラグランジアンを計算し、これから $SU(2)$ 2 重周期モノポール解のモジュライ空間上の漸近的超ハイパー計量を求めた。得られた計量の漸近的振る舞いはモノポールの 2 重周期性を

反映して ALH 型と呼ばれる新しいタイプのものとなっている。さらに、この計量の対称性やモジュラー不変性を確認するとともに M 理論をトーリックな 3 次元カラビ・ヤウ多様体上のコンパクト化して得られる 5 次元超対称ゲージ理論の低エネルギー有効作用から定まる超ハイパー計量との対応を調べた。

(4) ネットワーク型行列模型の対称性と拘束条件 [論文投稿中]

5 次元超対称ゲージ理論のネクラソフ分配関数の自然な無限次元対称性と考えられている Ding-Iohara-Miki 代数を実現している行列模型として、トーリックな 3 次元カラビ・ヤウ多様体上の(精密化)位相的弦理論と対応するネットワーク型行列模型を研究し、Ding-Iohara-Miki 代数に関する Ward 恒等式として行列模型の相関関数に対する拘束条件を導いた。

(5) q 変形ヴィラソロ代数とネクラソフ分配関数 [連携研究者: 栗田]

q 変形ヴィラソロ代数の $q = -1$ 極限に $N = 1$ 超対称ヴィラソロ代数が現れる事を確認し、その q 変形 W 代数への拡張も考察した。また q 変形ヴィラソロ代数の $q = 0$ 極限について、その 4 点関数が 5 次元 $SU(2)$ ネクラソフ分配関数の $q = 0$ 極限に一致することを証明した。さらに q 変形ヴィラソロ代数を含むレベル 2 の Ding-Iohara-Miki 代数の $q = 0$ 極限もよい極限になっている事が分かった。Ding-Iohara-Miki 代数のある生成子の固有ベクトル(一般化マクドナルド関数)の $q = 1$ 極限は、Morozov-Smirnov の一般化ジャック関数になっていることを示した。

(6) M2 ブレインを記述する ABJM 理論の分配関数 [連携研究者: 森山]

フェルミガス形式や数値計算を援用しながら、非摂動的な効果まで含め M2 ブレインを記述する ABJM 理論の分配関数を完全に決定した。その結果、驚くべきことに ABJM 分配関数は精密化された位相的弦理論の極限で記述できることが分かった。さらに続く論文で、分数ブレインを含む場合に結果を拡張し、一般的な 3 次元アフィン D 型クイバーゲージ理論の場合にもフェルミガス形式が適用できることを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

すべて査読有り

(1) S. Moriyama and T. Nosaka : Superconformal Chern-Simons Partition Functions of Affine D-type Quiver from Fermi Gas, Journal of High Energy Physics, 09 (2015) 054.

DOI 10.1007/JHEP09(2015)054.

(2) M. Hamanaka, H. Kanno and D. Muranaka : Hyperkaehler Metrics from Monopole Walls, Phys. Rev. D 89 (2014) 065033.

DOI 10.1103/PhysRevD.89.065033.

(3) Y. Hatsuda, M. Marino, S. Moriyama and Kazumi Okuyama : Non-perturbative effects and the refined topological string, Journal of High Energy Physics, 09 (2014) 168,

DOI 10.1007/JHEP09(2014)168.

(4) S. Matsumoto and S. Moriyama : ABJ Fractional Brane from ABJM Wilson Loop, Journal of High Energy Physics, 03 (2014) 079.

DOI 10.1007/JHEP03(2014)079.

(5) H. Kanno, K. Maruyoshi, S. Shiba and M. Taki : W_3 irregular states and isolated $N=2$ superconformal field theories, Journal of High Energy Physics 1303 (2013) 147.

DOI 10.1007/JHEP03(2013)147.

(6) H. Awata, S. Hirano and M. Shigemori : The partition function of ABJ theory, Progress of Theoretical and Experimental Physics (2013) 053B04.

DOI: 10.1093/ptep/ptt014.

(7) Y. Hatsuda, S. Moriyama and K. Okuyama : Instanton Bound States in ABJM Theory, Journal of High Energy Physics, 05 (2013) 054,

DOI 10.1007/JHEP05(2013)054.

(8) Y. Hatsuda, S. Moriyama and K. Okuyama : Instanton Effects in ABJM Theory from Fermi Gas Approach, Journal of High Energy Physics, 01 (2013) 158.

DOI 10.1007/JHEP05(2013)158.

(9) H. Kanno and M. Taki : Generalized Whittaker states for instanton counting with fundamental hypermultiplets, Journal of High Energy Physics 1205 (2012) 052.

DOI 10.1007/JHEP05(2012)052.

(10) H. Fuji, S. Gukov, P. Sułkowski with an appendix by H. Awata : Volume Conjecture: Refined and Categorified, Adv. Theor. Math. Phys. 16, 6 (2012) 1669-1777.

[学会発表] (計 8 件)

(1) H.Kanno : Confluence of regular singularities and the coherent state in quantum field theory, 8th International Conference on Science and Mathematics Education for Developing Countries, 2015 年 12 月 6 日, University of Yangon, Yangon (Myanmar).

(2) H.Kanno : Deformed Verlinde algebra and gauge/Bethe correspondence, Quantum Geometry, Duality and Matrix Models, 2015 年 8 月 25 日, Levedev Institute, Moscow (Russia),

(3) H.Kanno : Irregular puncture and generalized Whittaker state, International conference on mathematical research, education and application, 2013 年 12 月 23 日, University of Economics and Law, Ho Chi Minh City (Vietnam).

(4) H.Kanno : Irregular puncture and generalized Whittaker state, 代数幾何学と可積分系におけるモジュライ理論, 2013 年 9 月 19 日, 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市)

(5) H.Kanno : Superconformal index with surface operator and Macdonald polynomial, Synthesis of integrabilities in the context of gauge/string duality, 2013 年 9 月 9 日, Math. Department of Higher School of Economics, Moscow (Russia).

(6) H.Kanno : Irregular states and isolated superconformal field theory, 学振 2 国間交流事業日露共同研究 miniworkshop, 2013 年 3 月 24 日, 大阪科学技術センター (大阪府大阪市).

(7) H.Kanno : Generalized Whittaker states for instanton counting and the confluence of the punctures, 5th Workshop on Geometric Methods in Theoretical Physics, 2012 年 7 月 6 日, SISSA, Trieste (Italy).

(8) H.Kanno : Irregular puncture and isolated $N=2$ superconformal field theories, Synthesis of integrabilities in the context of gauge/string duality, Math. 2012 年 9 月 17 -- 21 日, Department of Higher School of Economics, Moscow (Russia).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

菅野 浩明 (KANNO Hiroaki)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号 : 90211870

(3) 連携研究者

栗田 英資 (AWATA Hidetoshi)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
研究者番号 : 40314059

森山 翔文 (MORIYAMA Sanefumi)
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号 : 80402452