

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 27 年 6 月 2 日現在

機関番号：32621

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24560477

研究課題名(和文)線形連立方程式の数理を援用したLDPC符号の新しい性能解析法および符号化法の開発

研究課題名(英文)Study of new analyzing method of LDPC codes and there practical encoding algorithm based on mathematical techniques on the system of linear equations

研究代表者

澁谷 智治 (SHIBUYA, Tomoharu)

上智大学・理工学部・准教授

研究者番号：20262280

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、次世代誤り制御方式の中核をなすものと期待されているLDPC符号化システムに関する、新たな高速符号化法や性能解析手法の開発を行った。

具体的には、線形連立方程式の効率的な解法であるDM分解法や、ヤコビ法に代表される反復解法に着目し、(1)任意の有限体上の線形符号に適用可能な高速符号化手法の開発、(2)近年新たに提案されたLDPC符号の1クラスである「SC-LDPC符号」と従来のLDPC符号との厳密な性能比較、を行う事に成功した。

研究成果の概要(英文)：In this research, we have proposed a fast encoding algorithm for LDPC codes and developed a method to evaluate their performance. More concretely, we carefully studied the characteristics of DM decomposition and Jacobi method, both of which can be utilized to efficiently solve systems of linear equations, and then succeeded (1) to propose a new encoding algorithm that can be applied to arbitrary linear codes, and (2) to compare error performance of SC-LDPC codes, that are recently invented, with that of conventional LDPC codes.

研究分野：情報通信工学

キーワード：LDPC符号 誤り訂正符号 符号化 線形連立方程式 DM分解 ヤコビ法

1. 研究開始当初の背景

(1) LDPC符号

LDPC (Low-Density Parity-Check) 符号とは、疎な検査行列で定義される誤り訂正符号の総称である。LDPC符号と反復復号法とを組み合わせたLDPC符号化システムは、BCH符号や畳込み符号を用いた従来の誤り訂正符号化システムをはるかに凌ぐ性能を示すことが90年代後半に明らかにされた。それ以降、LDPC符号化システムに関する研究は急速に発展し、現在では、通信・記録システムにおける次世代の誤り制御方式として多方面で採用されつつある。

(2) 実用的なLDPC符号の設計の困難性

LDPC符号の集合を適切に定めると、反復復号による平均的な誤り訂正能力は密度発展法などにより解析的に求められる。また、この解析結果に基づいて集合の条件を最適化することにより、符号長無限大のときの平均的な誤り訂正能力の意味で優れたLDPC符号の集合が得られる。しかしながら、実用的な符号長(数千から数万程度)において個々の符号の性能を解析的に評価する手法は未だ確立されていない。このため、具体的なLDPC符号の設計は、一般に膨大な時間を要する計算機シミュレーションに頼らざるを得ない(図1)。

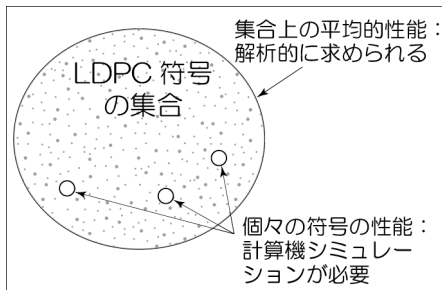


図1 LDPC符号の性能評価

(3) 符号化と復号の計算量のアンバランス

LDPC符号に対する反復復号は、従来の誤り訂正符号を凌駕する性能を $O(n \times n)$ ( $n$ は符号長)という極めて低い計算量で実現する画期的な復号法である。一方、LDPC符号の符号化に関しては、ごく一部のLDPC符号を除いて $O(n^2)$ の計算量を要する。このように、誤り訂正符号化システムとしての符号化と復号の計算量のアンバランスが、システムを運用する上で大きな問題となっている(図2)。

2. 研究の目的

本研究の目的は、LDPC符号化システムの設計や運用に関する上述の問題点を克服することである。

LDPC符号の符号化問題は、一意解を持つ線形連立方程式の求解問題として定式化できる。一方、復号問題については、解不定な

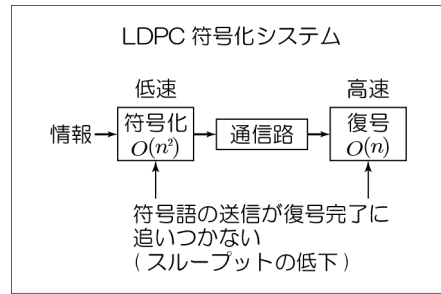


図2 LDPC符号化システムにおける計算量のアンバランス

線形連立方程式の一般解のうち、ある種の最適性を満たす解を探索する問題として解釈できる。従って、線形連立方程式の効率的解法とそれを支える数理は、適切な定式化や解釈を与えることによって、LDPC符号の符号化と復号に関する諸問題を解決する糸口となり得る。

そこで本研究では、線形連立方程式の効率的解法の中から、特にDulmage-Mendelsohn(DM)分解法、および、ヤコビ法に代表される反復解法に着目し、それらの拡張と、LDPC符号の性能解析や符号化計算量削減への応用について検討する。具体的には、以下の課題を解決することが本研究の目的である。

(1) LDPC符号の符号化計算量の削減

DM分解法に基づく線形連立方程式の求解法は、係数行列が疎な場合に特に大きな計算効率の向上をもたらす。このことは、線形連立方程式の求解問題と等価なLDPC符号の符号化が、DM分解法により効率的に実現できることを示唆しているが、実際の適用については検討が始まったばかりである。現時点で $O(n^2)$ を要する符号化の計算量を $O(n)$ に削減することを目標とする。

(2) 反復復号法の性能を規定する新たなパラメータの探求

ヤコビ法の更新規則における(線形連立方程式の)未知変数間の従属関係は、反復復号の更新規則におけるメッセージ間の従属関係と強い類似性を有する。このため、ヤコビ法の収束条件は反復復号の収束特性を解析する上で重要なファクターとなり得る。そこで、反復復号の収束特性の解析やLDPC符号の性能評価への、ヤコビ法の収束条件を記述するパラメータの応用について検討する。

3. 研究の方法

(1) 平成24年度の研究計画

本研究では、線形連立方程式の効率的な解法の中から、特に(1)DM分解法、(2)ヤコビ法を代表とする反復法、に着目し、これらを通じたLDPC符号の解析について検討を行った。研究の初年度においては、上記の各解法の基礎理論を整理すると共に、以下の手順により具体的な研究を進めた。

Haley の符号化法とDM分解法との関係解明

Haley らにより提案されたLDPC符号の符号化法では、ある規則に基づいてグループ化されたパリティビットを、各グループの依存関係に従って逐次的に決定することによって高速な符号化を実現している。この「パリティビットのグループ化」は「DM分解法における未知変数のグループ化」と密接な関係があるものと予想される。そこで、LDPC符号の高速符号化法の開発に向け、Haleyの符号化法とDM分解法との関係の解明を目指した。

反復復号法とDM分解法との類似点・相違点の明確化

で述べた「Haleyの符号化法とDM分解法の関係」は、「反復復号法とDM分解法の類似点」としても理解できる。即ち、反復復号法における送信ビットの高速推定に寄与する「送信ビット間の依存関係」と、DM分解法による高速解法の基礎を与える「未知変数間の依存関係」との類似点である。その一方で、反復復号法では、送信ビット間の依存関係に関する情報を、送信ビットの推定精度向上に活用していないなど、研究のポイントとなり得る重要な相違点も存在する。そこで、反復復号法とDM分解法との類似点・相違点を明確化し、反復復号の新たな性能解析法の開発に有用な手がかりを得ることを目指した。

ヤコビ法の理論の有限体上への拡張

一般的なLDPC符号は有限体上で構成される。このため、実数体上の線形連立方程式に対して展開されるヤコビ法の理論をLDPC符号の性能解析や符号化計算量の削減に応用するためには、実数体上のヤコビ法に関する様々な知見（収束条件や収束速度）を有限体上に拡張する必要がある。

(2)平成25年度以降の研究計画

2年目以降の研究では、初年度に行った研究および予備調査を進展させ、研究目的の項で述べたLDPC符号化システム的设计や運用に関する諸問題の解決を目指した。

反復復号のメッセージ更新規則の最適化におけるDM分解法の理論の応用

DM分解法の理論を反復復号法の解析に応用する際に問題となるのは、DM分解法が未知変数間の従属関係（一方向の依存性）を利用しているのに対し、反復復号法は送信ビット相互の依存関係（双方向の依存性）を利用している点である。そこで、DM分解法の数理論を切り口としてLDPC符号の符号化・復号の解析を行うために、この相違点をいかに解析に利用するかについて検討を行った。

反復復号法の性能を規定する新たなパラメ

ータの探求

DM分解法やヤコビ法の観点からLDPC符号の検査行列を解析した際に得られる各種パラメータと、反復復号法の挙動やLDPC符号の性能との関連について検討した。この結果、従来のアプローチでは得られなかった、LDPC符号の性能解析手法を新たに得ることが期待できる。さらに、各種パラメータと符号の性能との関連を検証するために、理論的に得られた性能限界と実際の性能とを計算機実験により比較し、理論の正当性・精密性の評価を行う。

4.研究成果

本研究では、

- 実用的な符号長における反復復号性能の解析手法の未整備による、具体的なLDPC符号の設計の困難性
- LDPC符号化システムにおける符号化と復号の計算量のアンバランス、を克服する手法を開発することを目的としている。これに対し、以下の成果を得た。

(1)LDPC符号の高速符号化アルゴリズムの開発

検査行列をブロック三角化することによって符号化の計算量を低減する手法については、本研究の申請段階で基本的なアイデアを得ていた。本研究ではさらに

- ブロック三角化を行うための高速アルゴリズムの開発
- ブロック三角行列の対角ブロックが三角行列とどの程度異なるかを示すパラメータの精密な評価

を行い、任意の有限体上の線形符号に適用可能な高速符号化手法を開発することに成功した。

また、2元LDPC符号に対して提案した符号化法を適用したときの計算量の評価を行い、

1. 符号を定義する検査行列の列重みが3以下の場合には提案手法は従来知られているLUらの手法と等価であること
2. それ以外の場合にはLUらの手法よりもはるかに高速な符号化法を与えること

を示した。これと共に、提案したアルゴリズムの計算量の厳密評価を行い、最悪計算量の意味で従来手法よりも劣ることはないことを理論的に示した。さらに、数値実験により、平均的な計算量の意味では、従来手法を大幅に上回ることを確認した。

これらの研究成果は、LDPC符号化システムにおける符号化と復号の計算量のアンバランスを克服するための、非常に有効な手段を与えるものである。また、LDPC符号化システムの高度化に大きく貢献するものである。

で得られた研究成果に対し、その更なる

ブラッシュアップを行った。

本研究課題では、任意に与えられた線形符号の検査行列に対し、行および列の置換を施してブロック三角行列に変換したのち、さらに冗長ビットの計算スケジュールに工夫を凝らすことによって、線形符号の符号化の計算量を低減する手法について検討を重ねてきた。その結果、線形符号、特にLDPC符号に対する高速符号化アルゴリズムを完成させている。

しかしながら、開発した符号化アルゴリズムをある種の線形符号に対して適用したとき、アルゴリズムの実行途中で予期していない形のブロック行列が現れる可能性があることが指摘された。そこで、そのような場合に対応できるように、開発したアルゴリズムの改編について検討を行った。具体的な解決策を与えるには至らなかったが、このアルゴリズムが適用可能な線形符号のクラスについて検討し、その明確化とアルゴリズムの改編に関するヒントを得ることができた。また、本研究に触発され、線形符号の高速符号化アルゴリズムに関する様々な後続研究が報告されていることも特筆すべきことと考えられる。

#### (2) LDPC符号化システムの性能評価

LDPC符号の設計手法は近年目覚ましい進展を見せ、従来にはない様々な手法により高性能LDPC符号を開発できるようになった。しかしながら、新たな手法により設計されたLDPC符号に対する性能解析手法は十分に整備されておらず、高性能符号を効率的に生成するための妨げとなっている。そこで、新たな手法により構成されたLDPC符号の性能を数値的に評価し、性能解析手法の開発への一助となる知見を得た。

具体的には、近年新たに提案されたLDPC符号の1クラスである「SC-LDPC符号」に対して本研究で得られた知見を適用することによって、これまでは不十分であったSC-LDPC符号と従来のLDPC符号との性能比較をより厳密に行うことに成功した。本成果は、LDPC符号の漸近的な性能比較に偏りがちであった従来研究に対して、実用的な符号長での厳密な性能比較を行った重要なものである。

#### (3) 本研究に関連する研究テーマの萌芽

本研究で検討を行った代数的な手法は、量子誤り訂正符号の設計や性能解析、フラッシュメモリの長寿命化に適した記録符号の設計や性能解析に対して多大な知見を与えた。現時点では具体的な研究成果に乏しいが、今後の研究を進めるうえで多くの知見が得られていることを申し添える。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

K. Kodaira, M. Wada, T. Shibuya, Single Error Correcting Quantum Codes for the Amplitude Damping Channel Based on Classical Codes over GF(7), IEICE Trans. Fundamentals, 査読有, vol.E97-A, no.11, 2014, 2247-2253.

DOI:10.1587/transfun.E98.A.2247

T. Shibuya, K. Kobayashi, Efficient Linear Time Encoding for LDPC Codes, IEICE Trans. Fundamentals, 査読有, vol.E97-A, no.7, 2014, 1556-1567.

DOI:10.1587/transfun.E98.A.1556

H. Ihara, T. Shibuya, On the Dependence of Error Performance of Spatially Coupled LDPC Codes on Their Design Parameters, IEICE Trans. Fundamentals, 査読有, vol.E96-A, no.12, 2013, 2447-2451.

DOI:10.1587/transfun.E96.A.2447

[学会発表](計8件)

K. Kodaira, T. Shibuya, On the Condition on Classical Codes to Construct Quantum Error Correcting Codes for Amplitude Damping Channel, 2014 International Symposium on Information Theory and its Applications, 2014年10月27日, Melbourne(Australia).

M. Wada, K. Kodaira, T. Shibuya, Entanglement-Assisted Quantum Error-Correcting Codes Based on the Circulant Permutation Matrix, 2014 International Symposium on Information Theory and its Applications, 2014年10月27日, Melbourne(Australia).

K. Kodaira, T. Shibuya, Classical Codes over GF(q) for Mersenne Prime q and Their Application to Quantum Codes for the AD Channel, 第36回情報理論とその応用シンポジウム, 2013年11月28日, ホテル聚楽(静岡県伊東市).

K. Kodaira, M. Wada, T. Shibuya, Construction of Single Error Correcting Quantum Codes for Amplitude Damping Channel Based on Classical Codes over GF(7), 第28回量子情報技術研究会, 2013年5月27日, 北海道大学(北海道札幌市).

神林雄也, 澁谷智治, Compressed Encodingを利用したRank Modulationにおける極小支配集合とその構成, 電子情報通信学会情報理論研究会, 2013年3月7日, 関西学院大学大阪梅田キャンパス(大阪府大阪市).

K. Kobayashi, T. Shibuya,  
Generalization of Lu's Linear Time  
Encoding Algorithm for LDPC Codes,  
2012 International Symposium on  
Information Theory and its Applications,  
2012年10月29日, Hawaii(USA).

澁谷智治,代数的符号理論(招待講演),誤  
り訂正符号のワークショップ,2012年9  
月26日,草津セミナーハウス(群馬県吾  
妻郡).

H. Ihara, T. Shibuya, On the dependence  
of error performance of spatially coupled  
LDPC codes on their design parameters,  
電子情報通信学会情報理論研究会,2012年  
7月19日,豊田工業大学(愛知県名古屋  
市).

## 6. 研究組織

### (1)研究代表者

澁谷 智治 (SHIBUYA, Tomoharu)

上智大学・理工学部・准教授

研究者番号: 20262280