様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ５ 月 ３０ 日現在

機関番号：１３９０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2012～2015
課題番号：２４６５０００４

研究課題名（和文）ロバスト最適化問題に対する数理計画アプローチ

研究課題名（英文）Mathematical programming approaches to robust optimization problems

研究代表者
柳浦　睦憲（Yagiura, Mutsunori）

名古屋大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：１０２６３１２０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：現実の応用に現れる多くの問題を組合せ最適化問題として定式化できる．その多くがNP困難と呼ばれる難しい問題であるにも関わらず，良質な解を得る実践的手法が多数存在する．しかしそれら最適化手法のほとんどは，入力データが既知のものであるという前提のもとにアルゴリズムが設計されている．一方，多くの現実問題において入力データには曖昧さや不確定要素が内在している．そのような不確実性に対してロバストな解を得る手法を，代表的な組合せ最適化問題である0-1ナップサック問題に対して提案し，多くの問題例に対して最適解あるいは良質な解を得ることに成功した．

研究成果の概要（英文）：Many real-world problems can be formulated as combinatorial optimization problems. Although most of them are know to be NP-hard, there exist many algorithms that obtain good quality solutions in reasonable computation time. However, most of such optimization methods are based on the assumption that input data are known a priori and are fixed. On the other hand, input data are often ambiguous and uncertain. We developed several exact and heuristic algorithms to obtain solutions that are robust to such uncertainty, for a representative combinatorial optimization problem called the 0-1 knapsack problem, and we confirmed that the proposed algorithms output good solutions in reasonable computation time.

研究分野：組合せ最適化

キーワード：組合せ最適化　ロバスト最適化　厳密解法　発見的解法

1.　研究開始当初の背景

技術が急速に発展し，最新かつ大量の情報を高速に入手・処理することが可能になった．このような技術革命に伴って，これらの技術資源やそこから得られる情報を有効に利用する必要性が高まってきた．この目的において重要な問題として，スケジューリング問題やネットワーク設計問題などの情報学的・システム工学的問題が挙げられるが，その多くは組合せ最適化問題として定式化できる．上述の技術革新に伴い，応用上重要な問題はますます大規模化・複雑化してきている．しかし，NP 困難性に代表されるように，多くの組合せ最適化問題に対し，問題の規模が大きい場合，厳密な最適解を求めることが極めて困難であることが認知されている．

このような問題に現実的に対処するための手法としてさまざまな最適化手法が提案されてきている．厳密な最適解を求める手法である分枝限定法や動的計画法，最適性の保証はないが良質の解を出来るだけ効率良く求めようとする発見的解法などがある．分枝限定法の近年の発展は目覚ましく，実用的で汎用性の高い解法として多くの数理計画ソフトウェアのエンジンとして利用されている．また，メタ戦略は，発見的解法の様々なアイデアをうまく組み合わせることによって高い性能を得ようとするパラダイムであり，その有用性は広く認知されるようになってきた．代表的なメタ戦略として，遺伝アルゴリズム，アニーリング法，タブー探索法などがある．分枝限定法とメタ戦略は最適化手法の中でもとくに汎用性が高く，極めてアクティブな研究分野である．

2.　研究の目的

最適化手法のほとんどは，入力データが既知のものであるという前提のもとにアルゴリズムが設計されている．しかし，多くの現実問題において入力データには曖昧さや不確定要素が内在している．たとえば，生産計画を立てるために最適化問題を解く段階では，需要が確定しておらず，需要予測に基づいて計画を行わなければならない．このような例では，計画の実行が終了した時点では需要ははっきり定まっており，確定した需要に基づいた実績によって計画の善し悪しが判断される．したがって，「計画段階で別の判断をしていればもっと利益が上がったのに」と後悔することのないような計画が望まれる．このような不確定要素を深く考慮せず，たとえば予測値をそのまま入力データとして既存の最適化手法を適用して得られた解を用いたのでは，入力データの変動に大きく影響されないような解を与える機能がないため，大きな後悔を招く恐れがある．

そこで，このような入力データの変動に大きく影響されないようなロバストな解，すなわち変動の組合せによって生じ得るどんな場合に対しても後悔の度合いが小さい解を得るようなアルゴリズムの開発が強く望まれている．また，開発したアルゴリズムが有用であるためには，大規模なデータに適用できることが望ましい．このような問題を解決するためのアルゴリズムの設計法の確立と，効率的なアルゴリズムの開発を研究目的とする．

3.　研究の方法

後悔の度合いを最適化問題を解くことによって評価するという枠組みを代表的な組合せ最適化問題に対して適用し，効率的な解法が設計できるか否かを検証していく．最適化手法としては，分枝限定法に基づく厳密解法と，メタ戦略に基づく発見的解法の両方を対象とする．対象とする組合せ最適化問題としては，構造が単純で基本的な 0-1 ナップサック問題を用いる．問題構造が単純なほど，数理計画のさまざまな手法が利用でき，よいアルゴリズムを開発できる可能性が高いからである．

0-1 ナップサック問題は，ナップサックの容量と，複数の要素の各々に対して利得とサイズが与えられたとき，ナップサックに入れる要素をいくつか選び，それらのサイズの合計がナップサックの容量を超えないという条件の下で，選んだ要素の利得の合計を最大化する問題である．この問題は NP 困難であることが知られているが，要素数 1 万程度であれば比較的高速に厳密な最適解が得られることが知られている．基本的な問題であり，多くの応用問題を解く際にしばしば子問題として現れる非常に重要な問題である．この問題は基本的な構造を持っているため，数理計画法に基づく種々のアイデアを検証しやすい．また，よいアルゴリズムが開発できた場合に適用範囲が広いというメリットもある．したがって，種々のアイデアを検証する対象として適切であると考え，研究対象とした．

この問題を解くための最適化手法として，まず，数理計画的なアイデアを試みやすい分枝限定法を対象とする．分枝限定法では，最適解が得られない場合でも，最適値に対する上界と下界の両方が得られるので，これらの値の近さを検証することで性能を評価することが出来る．その結果，既存研究による計算結果が入手できないような問題であっても，客観的に性能の善し悪しを判断できる．

次に発見的解法の開発を行う．そのようなア

ルゴリズムにより，分枝限定法よりも大規模な問題例に適用でき，より実用的なものが設計できることが期待できる．数理計画的な手法を用いて解を構築するタイプの手法と，メタ戦略に基づく反復改善型の手法を試みる．また，そのようなアルゴリズムの評価には，分枝限定法の計算過程で得られる上界あるいは下界の情報を利用する．

4. 研究成果

0-1 ナップサック問題のロバスト最適化版の一種である最大後悔最小化問題を考え，数理計画的手法の導入により最適解を得る手法を提案した．その理論的性質の解明と，計算実験による実験的解析による性能検証を行った．

まず，0-1 ナップサック問題の定義を与える．ナップサックの容量 c (≥ 0) と，n 個の要素の各々$j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して利得 p_j (≥ 0) とサイズ w_j (≥ 0) が与えられたとき，ナップサックに入れる要素をいくつか選び，それらのサイズの合計がナップサックの容量を超えないという条件の下で，選んだ要素の利得の合計を最大化する問題である．要素 j をナップサックに入れるとき $x_j = 1$，そうでないとき $x_j = 0$ の値を取る 0-1 変数 x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ を用いるとこの問題は以下のように定式化できる:

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \\
\text{制約条件} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq c \\
& x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.
\end{array}
$$

次に，最大後悔最小化問題の定義を述べる．本研究では利得に変動がある場合を考え，各要素 j の利得が区間 $[p_j^-, p_j^+]$ の範囲の任意の値を取りうるものとする．各要素 j に対して $p_j^s \in [p_j^-, p_j^+]$ を満たすベクトル $p^s = (p_1^s, p_2^s, \ldots, p_n^s)$ をシナリオと呼ぶ（便宜上シナリオ s と呼ぶ）．X を 0-1 ナップサック問題の実行可能解全ての集合とする．すなわち

$$
X = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq c, \right.
\left. x_j \in \{0, 1\} \; (j = 1, 2, \ldots, n) \right\}
$$

である．

$z^s(x)$ をシナリオ s に対して解 $x \in X$ が取る目的関数値

$$
z^s(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j^s x_j
$$

とする．また，z_*^s をシナリオ s に対する最適解の目的関数値とする．すなわち

$$
z_*^s = \max_{x \in X} z^s(x)
$$

である．これらの差を，あるシナリオ s に対する解 $x \in X$ の後悔 (regret) と呼び，

$$
r^s(x) = z_*^s - z^s(x)
$$

と表すことにする．S_0 を可能なシナリオ全ての集合，すなわち

$$
S_0 = \{ s \mid p_j^s \in [p_j^-, p_j^+] \}
$$

とする．これらを用いて，解 $x \in X$ の最大後悔 $r(x)$ を

$$
r(x) = \max_{s \in S_0} r^s(x)
$$

と定義する．区間型最大後悔最小化問題 (interval min-max regret knapsack problem, MRKP) は，最大後悔を最小にする実行可能解 $x \in X$ を求める問題であり，以下のように定式化できる:

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \displaystyle\max_{s \in S_0} r^s(x) \\
\text{制約条件} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq c \\
& x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.
\end{array}
$$

任意の実行可能解 $x \in X$ に対して後悔を最大にするシナリオを $\sigma(x) \in S_0$ と記すことにする．そのようなシナリオは

$$
p_j^{\sigma(x)} = \begin{cases} p_j^-, & \text{if } x_j = 1 \\ p_j^+, & \text{otherwise} \end{cases}
$$

により与えられることが知られている (Aissi et al., 2009; Yaman et al., 2001)．このことから，考慮すべきシナリオを

$$
S = \{ \sigma(x) \mid x \in X \}
$$

に絞ることができる．以下では簡単のため混乱のない場合は $\sigma(x)$ を単に σ と書く．上述の結果を用いると，MRKP の目的関数は

$$
\min_{x \in X} \left(\max_{s \in S} \left(\max_{y \in X} \sum_{j=1}^{n} p_j^s y_j - \sum_{j=1}^{n} p_j^s x_j \right) \right)
$$

$$
\min_{x \in X} \left(\max_{y \in X} \sum_{j=1}^{n} p_j^\sigma y_j - \sum_{j=1}^{n} p_j^\sigma x_j \right)
$$

と書ける．シナリオ σ に対する 0-1 ナップサック問題の最適解を $\tilde{y}_j^\sigma$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ で表し，

$$
p_j^\sigma = p_j^+ + (p_j^- - p_j^+) x_j
$$

であることを用いると，MRKP を以下のような整数計画問題 M(S) として定式化できる:

$$\min\ \theta - \sum_{j=1}^{n} p_j^- x_j \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\quad \theta \geq \sum_{j=1}^{n} p_j^+ \tilde{y}_j^\sigma + \sum_{j=1}^{n} (p_j^- - p_j^+) \tilde{y}_j^\sigma x_j, \quad \forall \sigma \in S \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq c \tag{3}$$

$$x_j \in \{0,1\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

制約 (2) の式の数は問題規模に対して指数的であり，全てを明示的に記述するのは現実的でない．そこで本研究では Benders 分解法のアイデアに基づき，ひとつの制約のみを含む $R \subset S$ に対して M(R) を解くことから始め，有効と思われる制約を逐次的に R に追加しては M(R) を解くことにより，最終的に実行可能解を得ることで最適解に到達する手法を提案した．このとき，初期の R として最良のシナリオを選ぶ方法を提案し，その理論的裏付けを与えた．また，計算実験により，Benders 分解型の手法の性能を検証した．その結果，利得の変動がそれほど大きくない問題例に対してこの手法により厳密な最適解が得られることが分かった．

適当な制約集合 $R \subset S$ を用いて M(R) を解くことで MRKP の最適値の下界を得ることができる．このアイデアに基づき，分枝カット法を提案した．さらに，ラグランジュ緩和を用いて強力な下界を高速に得る手法を提案し，分枝カット法に組込んだ．その結果，多くの問題例に対して Benders 分解法に基づく手法よりも高い性能を発揮するアルゴリズムを設計することに成功した．

発見的解法としては，シナリオを固定したのち 0-1 ナップサック問題を厳密に解くことで解を得る手法と，MRKP の制約の一部を線形緩和問題の双対問題を使って書き換えた問題を厳密に解くことで解を得る手法を提案した．また，メタ戦略のひとつである反復局所探索法によって解を改善する手法も提案した．計算実験によってそれらの性能を検証した結果，シナリオ固定法に比べて後者の 2 つの手法がより高い性能を示す傾向にあることが分かった．

問題データにおける利得の変動幅の大きさにもよるものの，要素数 70 程度までは提案手法によって厳密解あるいは高精度の解を現実的な時間で得ることに成功した．最大後悔最小化問題に対して厳密解法および発見的解法の実践的なアルゴリズムの設計法を提案し，一定の成果を得たといえる．

今後の課題として，本問題のより大規模な問題例に対して有効な手法を開発すること，および現実問題に近いより複雑な問題にも適用できる手法を設計することなどが挙げられる．

＜引用文献＞

1. Aissi, H., Bazgan, C., Vanderpooten, D. (2009) Minmax and minmax regret versions of combinatorial optimization problems: A survey, European Journal of Operational Research 197:427–438.

2. Yaman, H., Karaşan, O.E., Pinar, M.C. (2001) The robust spanning tree problem with interval data, Operations Research Letters 29:31–40.

5.　主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 1 件）

1. F. Furini, M. Iori, S. Martello and M. Yagiura, “Heuristic and Exact Algorithms for the Interval Min-Max Regret Knapsack Problem,” *INFORMS Journal on Computing*, 査読有り, Vol. 27, No. 2, pp. 392–405, 2015. http://dx.doi.org/10.1287/ijoc.2014.0632

〔学会発表〕（計 4 件）

1. W. Wu, M. Iori, S. Martello and M. Yagiura, Algorithms for the min-max regret generalized assignment problem with interval data, IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management, 査読有り，Malaysia, 2014 年 12 月 9–12 日.

2. W. Wu and M. Yagiura, Heuristic and exact algorithms for the interval min-max regret generalized assignment problem, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2014 年春季研究発表会，大阪，2014 年 3 月 6–7 日.

3. 呉偉，柳浦睦憲，Min-max criteria on the generalized assignment problem, 都市の OR ワークショップ，名古屋，2013 年 12 月 14 日.

4. F. Furini, M. Iori, S. Martello, M. Yagiura, Heuristic and exact algorithms for the interval min-max regret knapsack problem, ECCO 2012 - 25th Conference of European Chapter on Combinatorial Optimization, Turkey, 2012 年 4 月 26–28 日.

6.　研究組織

(1) 研究代表者
柳浦　睦憲（YAGIURA, Mutsunori）
名古屋大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号: 10263120

(2) 研究分担者　なし

(3) 連携研究者　なし

(4) 研究協力者
呉　偉（WU, Wei）
名古屋大学・大学院情報科学研究科
博士課程後期課程

MARTELLO, Silvano
University of Bologna
Professor

IORI, Manuel
University of Modena and Reggio Emilia
Associate Professor

FURINI, Fabio
Université Paris Dauphine
Assistant Professor