

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 12 日現在

機関番号：11301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2012～2014

課題番号：24654001

研究課題名(和文) ヴェイユ相互律に基づくモチーフ理論

研究課題名(英文) Motive theory based on Weil reciprocity

研究代表者

山崎 隆雄 (Yamazaki, Takao)

東北大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：00312794

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：Voevodsky による混合モチーフの理論は大成功を収めたが、ホモトピー不変な対象しか扱えないという点で拡張されるべき余地が残されている。実際、代数曲線の相対ピカル群のような基本的な対象でホモトピー不変でないものは多い。ホモトピー不変性の代わりにヴェイユ相互律を中心におくことで、このような対象を扱うことのできるよう拡張された混合モチーフ理論の構築を目指し、その基礎理論となる「相互前層」の理論を構築した。

研究成果の概要(英文)：Celebrated theory of mixed motives, due to Voevodsky, is yet to be extended in order to take into account non-homotopy invariant objects. Indeed, there are fundamental objects, such as relative Picard group of an algebraic curve, that are not homotopy invariant. By taking Weil reciprocity in the place of homotopy invariance, we established a theory of 'reciprocity presheaves', which is expected to become a foundation for an extended motive theory encompassing non-homotopy invariant objects.

研究分野：数物系科学

キーワード：数論幾何 モチーフ

1. 研究開始当初の背景

- (1) Voevodsky は混合モチーフの三角圏を構成した。その理論における重要な側面として、彼の圏における準同型群が数的サイクルのなす重要な群 (高次 Chow 群や Suslin ホモロジーなど) に一致するということが挙げられる。代数的サイクルのなす群はその定義が幾何学的になされるため、計算は非常に困難であることが多い。それに比較すると、三角圏の準同型群は代数的な操作がしやすいため、様々な面で扱いやすくなる。例えば、二つ以上の多様体の直積に対する高次 Chow 群は、幾何的に扱おうとしてもきわめて困難であるが、Voevodsky の三角圏を用いるとテンソル積という代数的な操作で表示することができる。ただし、Voevodsky の圏におけるテンソル積の定義はきわめて複雑であり、そのまま計算することはやはり困難である。一方、Voevodsky の構成とはまったく異なる原理に基づいて定義された染川 K-群という群によって、直積多様体の高次 Chow 群を表示できる場合があることが 1990 年から 2005 年頃までに様々なケースで観察されていた (加藤、染川、Raskind, Spiess, Atkhar による)。
- (2) Voevodsky の理論においてはホモトピー不変性という強い性質が大前提として扱われている。実際、その理論では「ホモトピー不変移送付き前層」と呼ばれるものを基礎として構築されている。ところが、代数曲線の相対ピカル群のように、基本的な対象でありながらホモトピー不変ではない (しかし移送付き前層ではある) ものが、古くから数多く知られている。このような対象を扱うことができるよう拡張された混合モチーフ理論が必要になるであろうことは、Voevodsky 自身によって早い段階から予見されていた。
- (3) 前項の目標を達成するためには、ホモトピー不変性に変わる原理を見いだす必要がある。そこでヒントとなるのが(1)で述べた染川 K-群の理論である。この群はホモトピー不変性を用いず、その代わりに Weil 相互律を基本原理として定義される群である。それが正しく代数的サイクルのなす群を計算するということは、Voevodsky の理論においてホモトピー不変性を Weil 相互律で置き換えた理論が構築できる可能性を強く示唆する。

2. 研究の目的

- (1) Voevodsky が構成したモチーフの三角圏におけるテンソル積と、染川 K 群の関係を明らかにする。また、それによって二つ以上の多様体の直積に対する代数的サイクルの群 (特に高次 Chow 群と

Suslin ホモロジー) を、より効果的に計算する方法を考察する。

- (2) Voevodsky による「ホモトピー不変移送付き前層」の理論を一般化した、「相互前層」の理論を確立する。これは、代数曲線の相対ピカル群のように、ホモトピー不変ではないものまで扱える必要がある。

3. 研究の方法

本課題は数学の研究であるから、研究の方法はもくもくと考え続けることが中心となる。もう一つ重要な点は、国内外の多くの研究者と交流し、議論を交わすことである。本課題においてはその点を重視して、研究集会を多く行った。以下にそれをリストとして挙げる：

- (1) 2014 Japan-Taiwan Joint Conference on Number Theory. 気仙沼大島、2014年9月1～6日。
- (2) 函館数論幾何ワークショップ. 北海道教育大学函館校、2014年5月26日(月)～28日(水)。
- (3) Workshop on reciprocity sheaves. 八ヶ岳自然文化園、2013年7月28日～8月1日。
- (4) 2012 NCTS Japan-Taiwan Joint Conference on Number Theory. Hsinchu, 台湾、2012年8月27日～9月7日。
- (5) Workshop on p-adic arithmetic geometry and motives. 東北大学、2012年1月23日～25日。

また、以下の研究集会においてもプログラム委員として開催に協力した。

- (1) East Asia Number Theory Conference 2014, 福岡、2014年1月20～24日。

4. 研究成果

- (1) Bruno Kahn 氏と私の共同研究において、Voevodsky の圏におけるテンソル積と染川 K-群が一致することを証明した。これら二つのうち、前者はホモトピー不変性、後者は Weil 相互律というまったく異なる原理に基づいて定義されていることに注意する必要がある。この研究は、Weil 相互律に基づくモチーフ理論を全面的に展開する契機となった。なお、「研究開始当初の背景」(1)項で述べたように、Voevodsky の圏における準同型群は高次 Chow 群など代数的サイクルの群を正しく計算するため、この結果は直積多様体の代数的サイクルを計算するという応用を持つ。この結果は論文(6)および(8)として出版された。
- (2) 当初、染川 K-群はホモトピー不変な対象に対してのみ定義がなされていたのであるが、Florian Ivorra 氏と Kay Rueling 氏はそれをホモトピー不変で無い対象まで拡張した。これはホモトピー不変な対

象についてはオリジナルの染川K-群と一致することが確認されている。彼らはホモトピー不変で無い対象についてもいくつかの興味深い例を計算している。Kay Rueling 氏と私の共同研究では、彼らが計算できなかった重要なケース（アーベル多様体と加法群のなす染川K-群）を計算した。この結果は論文(1)として出版された。

- (3) Bruno Kahn 氏および斎藤秀司氏と私の共同研究において、「ホモトピー不変移送付き前層」を一般化した「相互前層」の概念を定義し、その基礎理論を整備した。具体的には以下の結果が得られている：まず、曲線の相対ピカル群が一般ヤコビ多様体で表現されたように、モジュラス付きの Chow 群を表現する相互前層が存在することを示した。これはモチーフ理論における新しい重要な研究対象であると期待される。また、可換代数群で表現される層、およびホモトピー不変な移送付き前層は相互前層であることも示した。さらに、Kay Rueling 氏によって Kaehler 微分形式の層や（正標数における）de Rham-Witt 部分形式の層も相互前層であることが示された。最後に、相互前層の Zariski 層化は Nisnevich 層化に一致して相互前層となること、開埋め込みに対する単射性条件を満たすこと、射影直線に関する不変性を満たすこと、などが証明された。これらの成果をまとめた論文は投稿中であるが、プレプリントとしてインターネット上に公開されている。
- (4) 宮坂宥憲氏および小林真一氏と共同で、 $p$ -進ソリトン理論について研究した。これは佐藤幹夫により展開された KP 階層に関するソリトン理論の  $p$ -進版であり、 $p$ -進タウ関数が中心的な役割を果たす。 $p$ -進理論における特有の現象として、代数曲線のヤコビ多様体の形式群が  $p$ -進タウ関数と密接に関係することが明らかになった。さらに、この結果は Manin-Mumford 予想に関連する数論幾何的な応用を持つ。すなわち、ある種の（高い位数の自己同型を持つ）代数曲線に対して、そのヤコビ多様体のテータ因子上にある有限位数の点の分布について強い制限が得られる。この結果は論文(2)(3)(5)として出版された。
- (5) 局所体上の完備とは限らない多様体に対して、高次元類体論と Brauer-Manin 双対の理論を構築した。前者は Suslin ホモロジーと順分岐アーベル基本群を結びつけるものであり、後者はモチビクホモロジーとブラウアー群を結びつける。この結果は論文(7)として出版された。
- (6) Pol Vanhaecke 氏および井上玲氏と共同で代数的完全可積分系の研究を行った。Beauville 系と呼ばれる代数的可積分系

をスペクトル曲線が自己同型を持つ場合に制限し、そこに付加構造を入れることによって新しい代数的可積分系を構成した。技術的には、ガロア・コホモロジーを用いてヤコビ多様体の不変部分の連結成分を計算することがポイントである。この結果は論文(4)として出版された。

## 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計 8 件)

- (1) Kay Rueling and Takao Yamazaki, K-Groups of reciprocity functors for  $G_a$  and abelian varieties. Journal of K-theory. (掲載決定、掲載号は未定), 査読あり.
- (2) Shinichi Kobayashi and Takao Yamazaki, Torsion points on Jacobian varieties via Anderson's  $p$ -adic soliton theory. Asian Journal of Mathematics. (掲載決定、掲載号は未定), 査読あり.
- (3) 山崎隆雄,  $p$ -進ソリトン理論入門. 数理解析研究所講究録別冊 (掲載決定、掲載号は未定), 査読あり.
- (4) Rei Inoue, Pol Vanhaecke and Takao Yamazaki, Algebraic integrable systems related to spectral curves with automorphisms. Journal of Geometry and Physics, 87, Topical issue "Finite-dimensional integrable systems: on the crossroad of algebra, geometry and physics" (2015), 198-216.
- (5) Yuken Miyasaka and Takao Yamazaki, Torsion points on hyperelliptic Jacobians via Anderson's  $p$ -adic soliton theory. Tokyo Journal of Mathematics, 36 (2013), 387-403. 査読あり.
- (6) Bruno Kahn and Takao Yamazaki, Voevodsky's motives and Weil reciprocity. Duke Mathematical Journal, 162, (2013), 2751-2796. 査読あり.
- (7) Takao Yamazaki, Brauer-Manin pairing, class field theory and motivic homology. Nagoya Mathematical Journal, 210, 29-58 (2013). 査読あり.
- (8) 山崎隆雄, ヴォエヴォドスキーのモチーフとヴェイユ相互律. 数理解析研究所講究録別冊 44 (2013), 165--181. 査読あり.

〔学会発表〕(計 22 件)

- (1) 山崎隆雄, 「Weil 相互律とモチーフ」(連続講義) 2015年1月19日~23日、名古屋大学.
- (2) Takao Yamazaki,  $p$ -adic soliton theory and arithmetic geometry. Novel visage

- of arithmetic and derived geometry, 2014年10月10日、中央大学.
- (3) Takao Yamazaki, p-adic soliton theory and arithmetic geometry. Mini-workshop, 2014年7月7日、東北大学.
- (4) Takao Yamazaki, Reciprocity sheaves. Seminar on Number Theory and Automorphic forms, 2014年7月4日、大阪大学.
- (5) Takao Yamazaki, Reciprocity sheaves. Workshop on arithmetic geometry in Hakodate, 2014年5月27日、北海道教育大学函館校.
- (6) Takao Yamazaki, Voevodsky's motif and Weil reciprocity. 2014 NCTS Mini-Workshop on Number Theory, 2014年3月12日、新竹市、台湾.
- (7) Takao Yamazaki, p-adic soliton theory and arithmetic geometry. Arithmetic and Algebraic Geometry 2014, 2014年1月30日、東京大学.
- (8) Takao Yamazaki, p-adic soliton theory and torsion points on Jacobian varieties. East Asia Number Theory Conference 2014, 2014年1月23日、西新プラザ、福岡.
- (9) Takao Yamazaki, Towards non-homotopy invariant motive theory. Colloquium, 2014年1月8日、京都大学.
- (10) 山崎隆雄, 「p-進ソリトン理論入門」(連続講義) 2014年1月6日~10日、京都大学.
- (11) Takao Yamazaki, p-adic soliton theory and torsion points on Jacobian varieties. Algebraic Number Theory and Related Topics, 2013年12月11日、京都大学数理解析研究所.
- (12) Takao Yamazaki, Reciprocity sheaves: towards non-homotopy invariant motive theory. Motives in Tokyo, 2013年11月27日、東京大学.
- (13) Takao Yamazaki, Reciprocity sheaves: towards non-homotopy invariant motive theory. Arithmetic, differential and geometry, 2013年10月31日、東北大学.
- (14) Takao Yamazaki, Torsion points on Jacobian varieties via Anderson's p-adic soliton theory. Seminaire Groupes, Algebre et Geometrie, 2013年9月19日、ポアチエ大学、フランス.
- (15) Takao Yamazaki, Reciprocity sheaves. Workshop on reciprocity sheaves, 2013年7月31日、八ヶ岳自然文化園.
- (16) 山崎隆雄, 「p-進ソリトン理論入門」(連続講義) 2013年5月27日~3

1日、北海道大学.

- (17) Takao Yamazaki, p-adic soliton theory and arithmetic geometry. Colloquium, 2012年10月31日、北海道大学.
- (18) Takao Yamazaki, Algebraic cycles on a product of curves over a p-adic field. Seminaire autour des cycles algebriques, 2012年11月21日、ジュシュー数学研究所、フランス.
- (19) Takao Yamazaki, Torsion points on Jacobian varieties via Anderson's p-adic soliton theory. Seminaire de theorie des nombres, 2012年11月19日、ジュシュー数学研究所、フランス.
- (20) Takao Yamazaki, Voevodsky's category of motives and Milnor K-groups attached to semi-abelian varieties. Number Theory Day in Keio, 2012年9月13日、慶應大学.
- (21) Takao Yamazaki, Torsion points on Jacobian varieties via Anderson's p-adic soliton theory. Tohoku-Fudan Workshop, 2012年11月21日、東北大学.
- (22) 山崎隆雄, 「p-進ソリトン理論入門」(連続講義) 2012年5月28日~6月1日、千葉大学.
- (23) Takao Yamazaki, Somekawa's K-groups and Voevodsky's Hom groups. Arithmetic geometry seminar (連続講義), 2012年4月19-20日、北海道大学.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
取得年月日:  
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山崎隆雄 (Takao Yamazaki)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：00312794

(2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3) 連携研究者

( )

研究者番号：