

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 10 日現在

機関番号：11301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2012～2014

課題番号：24654002

研究課題名(和文) 数論的微分方程式の整構造とその背景にある幾何

研究課題名(英文) Integral structures of arithmetic differential equations and geometries behind them

研究代表者

都築 暢夫 (TSUZUKI, Nobuo)

東北大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：10253048

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：研究代表者がこれまでの研究の中で構成した一般超幾何関数を周期積分に持つ射影直線上の数論的Calabi-Yau族の幾何学的、および数論幾何学的な性質に関して成果を得た。特に、奇数次元の場合に、ある退化ファイバーにおける半安定族で、その特異ファイバーでの既約因子が2つで一方が有理的、他方が数論幾何学的に面白い数論的多様体になるものが存在することを示し、その既約因子の有理係数のコホモロジーを決定した。3次元の場合には特異ファイバーの既約因子の保型性を証明した。
また、2次元のとき、2進半安定族をある2のみで分岐するZの分岐拡大上で構成し、至る所良い還元を持つある代数体上のK3曲面を構成した。

研究成果の概要(英文)：We studied properties of the arithmetic family of Calabi-Yau varieties, constructed by the representative of this research, for which the period integral is a generalized hypergeometric functions. In particular, if the dimension is odd, we found a semistable family around a degenerated fiber such that the number of irreducible components of the special fiber is two among which the one is rational and the other has an interesting nature with respect to arithmetic geometry. In particular, we proved the modularity of the special fiber in dimension 3. In the case of dimension 2, we constructed a semistable family over an extension of Z which is ramified only at 2 and got a K3 surface over an algebraic number field such that it has a good reduction everywhere.

研究分野：数論幾何学

キーワード：超幾何関数 剛性カラビ・ヤウ多様体 半安定退化 整係数コホモロジー ガロア表現 保型性 2進還元

1. 研究開始当初の背景

ガウスの超幾何微分方程式の一般化である $(1/2, 1/2, \dots, 1/2)$, $(1, \dots, 1)$ を指数に持つ $n+1$ 階線形常微分方程式に対して、研究代表者の都築は一般超幾何関数 $n+1F_n(\dots; \dots)$ を周期積分に持ち、 $Z[1/2]$ 上の射影直線をパラメータ空間とし、 $\alpha = 0, 1$, β のみで特異ファイバーを持つ n 次元カラビ・ヤウ多様体族を具体的に構成し、 $\alpha = 0$ での退化からコホモロジー(ベッチ、ドラム、 l 進エタール、クリスタリン) 族とその整構造を2 べきねじれ部分を除いて決定した(論文執筆中)。その応用として、連携研究者の山内は総実代数体に値を持つファイバーに付随するガロア表現の保型性を示した。この数論的カラビ・ヤウ多様体族は楕円曲線のル・ジャンドル族の自然な高次元化になっていて、一般の n に対しては今まで知られていないものであった。

研究代表者による数論的カラビ・ヤウ多様体族ですら知られていなかったように、高次元の数論的多様体族の興味ある例は今まで多くは知られていない。一般超幾何関数などの線形微分方程式系を周期微分方程式に持つ高次元の数論的多様体族を構成することに一つの意義があり、そこには整数論的にも数理論理的にも美しい応用がある。

2. 研究の目的

一般超幾何微分方程式などの有理数体係数関数体上の線形微分方程式系に対して、大域的な整構造を決定することは、整数論や表現論・数理論理などの様々な分野における不変量の整数性問題に幅広い応用を持つ。この研究では、与えられた線形微分方程式系を周期微分方程式に持つ有理整数環 Z 係数のパラメータ空間上の完備で滑らかな代数多様体族(数論的多様体族) を構成し、退化やガロア表現などの数論幾何的な視点から種々のコホモ

ロジーの整構造の性質を考察することを目的とする。

数論的微分方程式の背景にある幾何を考察して、その整構造を研究する。特に、指数が一般の高次超幾何微分方程式を周期積分に持つ数論的多様体族を構成して、その幾何学的性質を研究する。一般高次超幾何関数を周期積分に持つ開多様体族の良いコンパクト化を導入して、その特異繊維での退化の様子を考察し、ベッチ、ド・ラム、 l 進エタール、 p 進の各相対コホモロジーを決定し、各コホモロジーの整構造を導入して、幾何学的な性質を考察する。また、特異な素数での還元の幾何的状況を調べる。さらに、各繊維での一般超幾何局所系のモジュラー性を考察する。

この研究の一つの特徴は、一般の次元の数論的多様体族を具体的に構成して、その幾何を考察することである。そのためには、闇雲に多様体族を考えては必ずしもうまくいかないし、数学的に意味があるものにはならない。超幾何関数のような特殊関数やその一般化は、関数等式等の幾何学的な現象の現れを持っていて、さらに数学全体に様々な形で現れてきている。一般超幾何関数の良い幾何、特に数論幾何学的な意味で、を具体的な形で深く掘り下げて考察することは、数学全体に発露している一般超幾何関数の横へのつながりをより深く理解する可能性をもたらす。

3. 研究の方法

具体的に与えられた代数多様体族の数論的な意味での滑らかなコンパクト化を美しい形で構成するためには、代数幾何学・数論幾何学の種々のテクニックを有効に適用する必要がある。この研究では、数論的なコホモロジー論、保型性などの整数論、および、代数幾何と数理論理を専門とする研究代表者、連携研究者が一体となり、相互に連絡し合いながら研究目的の達成を目指す。

研究代表者は、指数 $1/2, \dots, 1/2$ と $1, \dots, 1$ の場合の一般超幾何関数を周期積分に持つ射影直線から3点 $0, 1, \infty$ を除いた数論的曲線上の数論的カラビ・ヤウ族の構成した。この多様体族に対して、

(i) ∞ の周りでの特異ファイバーの退化の考察

(ii) 2進還元の考察

を行う。さらに、連携研究者である鹿児島大学の山内卓也は ∞ の周りでの特異ファイバーのモジュラー性と期待すべきL関数の関数方程式を考察する。

∞ の周りでの不安定族の構成が最初の問題であり、数論幾何学の様々な手法、例えば、有限体上の有理点の個数の計算やモノドロミー・重みスペクトラル系列などを用いて、 ∞ の周りでの不安定族の特異ファイバーに現れる多様体のコホモロジーを決定する。また、保型性に関しては、Frobenius跡の計算によるものと、モジュラー多様体との間の代数対応の構成が考えられ、両方法で考察する。

4. 研究成果

研究代表者が構成した一般超幾何を周期積分に持つ数論的Calabi-Yau族の幾何的および数論幾何的な性質に関して成果を得た。特に、3次元の場合に特異ファイバーの既約因子の保型性を証明した。

研究代表者が構成した指数が $1/2, \dots, 1/2$ と $1, \dots, 1$ の一般超幾何関数を周期積分に持つ2を可逆にした整数環上の射影直線 \mathbb{P}^2 上 $0, 1, \infty$ 以外の外で射影的かつ滑らかなCalabi-Yau族になる。3次元以上の奇数次元 n に対して、 ∞ における退化ファイバーを考察して

(i) ∞ における不安定族の構成、特に既約因子が2つで一方が有理的、他方 Y が数論幾何的に面白い数論的多様体になること、

(ii) Y の有理係数コホモロジーの決定、

(iii) Y のホッジ数の決定、

(iv) $n=3$ のときは Y は剛性Calabi-Yau多様体になり、中間次元のコホモロジーは重さ4のレベルが8のモジュラー形式からくることを証明した。(i)の不安定族の構成は、有理多様体族上の2重被覆であることと有理多様体上のブローアップを利用する。有理コホモロジーの決定においては、2重被覆になっていること、重み-モノドロミースペクトル系列の考察による。 n が3の場合だけ Y に付随する複素多様体がCalabi-Yauになり、Hodge数の考察から剛性となる。普遍楕円曲線族の直積からの写像を具体的に構成し、 Y の保型性を幾何的方法で証明した。この結果は、3次元剛性Calabi-Yau多様体の保型性予想の具体的な一例になっている。また、保型性に関しては、連携研究の山内がFourier係数とFrobenius跡の比較から数論的な証明を与えている。

さらに、この多様体族に対して、2進還元を考察し、2進族のgenericなモデルの具体的な構成をした。genericな方程式は決定できるが、一般の次元ではその滑らかなコンパクト化の構成は今後の課題として残った。2次元の場合はコンパクト化を具体的に構成することができる。応用として、ある代数体の素点上で至る所良い還元を持つK3曲面が具体的に構成できる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計10件)

Henry- H. Kim and T. Yamauchi, Cusp forms for exceptional group of type E_7 , Compositio Math., (2015), 掲載決定

Henry-H. Kim and T. Yamauchi, A conditional construction of Artin representations for real analytic Siegel cusp forms of weight $(2,1)$, Contemporary Mathematics, (2015), 掲載決定.

Bruno Chiarellotto, Nobuo Tsuzuki, Clemens-Schmid exact sequence in characteristic p , Math. Annalen, 358 (2014), 971-1004.

DOI: 10.1007/s00208-013-0980-8

Michitaka Miyauchi, Takuya Yamauchi, An

explicit computation of p -stabilized vectors, *Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux* (2014)

Shunichi Kimura, Shigeru Kuroda, Nobuyoshi Takahashi, The closed cone of a rational series is rational polyhedral, *Journal of Algebra* 405(2014), 243- 258. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2014.02.007

Michitaka Miyauchi, Takuya Yamauchi, Local newforms and formal exterior square L - functions, *The International Journal of Number Theory*, 9 (2013), 1995- 2010. DOI: 10.1142/S179304211350070X

Nobuyoshi Takahashi, Nonstandard point counting for algebraic varieties, *Comm. in Algebra*, 41 no.3, (2013), 971- 978. DOI: 10.1080/00927872.2012.737074

Nobuo Tsuzuki, A note on the first rigid cohomology group for geometrically unibranch varieties, *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova* 128(2012), 17-53. DOI: 10.4171/RSMUP/128-3

Daniel Caro, Nobuo Tsuzuki, Overholonomicity of overconvergent F -isocrystals over smooth varieties, *Annals of Math.*, 176, no.2(2012), 747- 813. DOI: 10.4007/annals.2012.176.2.2.

Kenichiro Kimura, Shun-ichi Kimura, Nobuyoshi Takahashi, Motivic zeta functions in additive monoidal categories, *J. K- Theory*, 9 no.3 (2012), 459- 473. DOI: 10.1017/is011011006jkt174

〔学会発表〕(計 17 件)

Nobuo Tsuzuki, On a Lefschetz type problem and variation of slopes for F -isocrystals, *Workshop on recent trends in p -adic cohomology* (招待講演), 2015 年 03 月 25 日, Imperial College London(イギリス).

山内卓也, Cusp forms on E_7 , 金沢大学組合せ数学セミナー(招待講演), 2014 年 12 月 01 日, 金沢大学.

山内卓也, The weight in Serre's conjecture for GSp_4 , 東北大学整数論セミナー(招待講演), 2015 年 03 月 18 日, 東北大学.

Nobuo Tsuzuki, On constancy of Newton polygons of F -isocrystals, *Workshop of arithmetic geometry in Tohoku* (招待講演), 2014 年 10 月 31 日, 東北大学

Bruno Chiarellotto, Nobuo Tsuzuki, The Clemens Schmidt sequence, *ALGANT summer school on MONODROMY* (招待講演), 2014 年 06 月 23 日 ~ 06 月 27 日, Dobbiacco(イタリア).

Nobuo Tsuzuki, Clemens-Schmid exact sequence in characteristic p , *Mini-Workshop on Arithmetic* (招待講演), 2014 年 05 月 08 日, 台湾大学(台湾)

Nobuo Tsuzuki, On the singular fiber of the arithmetic family of hypergeometric Calabi- Yau, *Seminaire de Geometrie Arithmetique et Motivative*(招待講演), 2014 年 03 月 14 日, パリ 13 大学(フランス).

Nobuo Tsuzuki, On integral cohomologies for an arithmetic family of hypergeometric Calabi- Yau, *Seminaire de Mathematique* (招待講演), 2014 年 03 月 12 日, IHES(フランス)

都築暢夫, Singular fibers of the arithmetic family of hypergeometric Calabi- Yau varieties, *Arithmetic, differentials, and geometry* (招待講演), 2013 年 11 月 01 日, 東北大学.

Takuya Yamauchi, Artin representations for $GSp(4)$ attached to real analytic Siegel modular forms, *Number Theory/Representation Theory Semina*, 2013 年 09 月 25 日, トロント大学(カナダ).

Takuya Yamauchi, The L - function of some Siegel modular 3-folds and endoscopic lifts, *Seminar at Jussieu* (招待講演), 2013 年 06 月 17 日, パリ 6 大学(フランス).

Nobuo Tsuzuki, On the first rigid cohomology groups for mildly singular varieties, *Seminaire de geometrie algebrique*, 2013 年 03 月 21 日, Rennes 大学(フランス).

山内卓也, Arithmetic Calabi- Yau families associated to generalized hypergeometric local systems and its applications, 第 8 回代数・解析・幾何学セミナー(招待講演), 2013 年 02 月 18 日, 鹿児島大学

Nobuo Tsuzuki, On the first rigid cohomology groups for mildly singular varieties, *Mini-workshop on Arithmetic*(招待講演), 2012 年 12 月 18 日, 台湾大学(台湾).

Takuya Yamauchi, Endoscopic lift to the Siegel paramodular threefold related to Klein cubic threefold, *Number Theory / Representation Theory Seminar*, 2012 年 11 月 21 日, Toronto 大学(カナダ).

Nobuo Tsuzuki, The first rigid
cohomology groups for mildly singular
varieties, p-adic cohomology and its
applications to arithmetic geometry (招待
講演), 2012年10月30日, 東北大学.

都築暢夫, p-adic Clemens-Schmid exact
sequence, Symposium on ARITHMETIC &
GEOMETRY(招待講演), 2012年06月01日, 九
州大学.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕
ホームページ等なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

都築 暢夫 (TSUZUKI, Nobuo)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 10253048

(2) 研究分担者

山内卓也 (YAMAUCHI, Takuya)
鹿児島大学・教育学部・准教授
研究者番号: 90432707
(平成24年度より連携研究者)

(3) 連携研究者

高橋 宣能 (TAKAHASHI, Nobuyoshi)
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 60301298