様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　２８　年　　６　月　１３　日現在

機関番号：１４５０１

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2012～2015

課題番号：２４６５４００５

研究課題名（和文）整数論の密度定理における第二主要項の研究

研究課題名（英文）Second main terms for density theorems in number theory

研究代表者

谷口　隆（Taniguchi, Takashi）

神戸大学・理学（系）研究科（研究院）・准教授

研究者番号：６０４２２３９１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：代数体を判別式の順序で数える関数のいくつかについて，第二主要項を詳しく調べることができた．例えば，非可換な６次ガロア拡大を数える関数について，第二主要項に加え第三主要項が存在する可能性を指摘した．また相対３次拡大を数える関数について，基礎体が二次体の場合に第二主要項を決定した．一般の基礎体上でも平滑化した関数で第二主要項を決定した．この他数点の成果がある．またこの問題に関連して，概均質ベクトル空間の指数和を計算する単純な方法を見出した．

研究成果の概要（英文）：We studied in details the second main terms in counting discriminants of certain families of number fields. The results include: On the counting function for non-commutative sextic Galois fields, we get an evidence that there might exist the tertiary main term. On the counting function for relative cubic extensions, when the base field is a quadratic field, we determined the second main term; over a general number field, we determined the second main term for a smoothed counting function. We have several more results. As a related problem, we discover a simple method to evaluate certain exponential sums associated with prehomogeneous vector spaces.

研究分野：整数論

キーワード：第二主要項　密度定理　三次体　概均質ベクトル空間　指数和

１．研究開始当初の背景

整数論の古典的な問題の一つに，代数体の判別式の分布を調べる問題がある．２次体の判別式の場合この問題は単純だが，３次体の判別式の個数を数える関数を考えると興味深い問題になる．1970 年代に第一主要項が決定されており，2011 年に研究代表者は Frank Thorne 氏との共同研究で，第二主要項を決定した．このとき，等差数列中の判別式の分布を考えると，第二主要項に偏りの現れることが見出された．

さらに, 非可換な６次 Galois 拡大の個数を数えると期待される第二主要項が数値実験とあまり合わなかったり，異なる密度定理の主要項に現れる定数の間に簡単な関係があったりする，などの現象も見つかっていた．

密度定理における第二主要項は一般に証明が容易でないが，その公式は第一主要項に比して繊細であり，近年の理論発展に伴って, 上述のようにこれまで見えていなかった様々な数学的構造や関係が示唆・観察されはじめていた．

他方この 10 年余りで, Bhargava が中心となって推進している数論的不変式論と呼ばれる研究分野が大きな発展をみせた．（Bhargava はこの分野における一連の画期的な研究成果により，2014 年に Fields 賞を受賞している．）これに伴って，第二主要項が研究可能であると考えられる密度定理も増えており，またその意味を考える上での視点もより豊富に提供されるようになってきていた．

２．研究の目的

整数論におけるいくつかの密度定理において，第二主要項を研究する．第二主要項の存在を予想・証明する．また，異なる密度定理の間の主要項の間の関係についても追求する．それらの研究の中でどのような数学的な構造が見出されるか注意を払い，発見された場合にはその数学的な根拠も追求する．他分野との結びつきについても，既存の枠組みに捉われない視点で，関連が見出されないか多面的に検討する．

３．研究の方法

概均質ベクトル空間と関係する密度定理については，ゼータ関数を最も基本的かつ主要な道具として用いる．２次体の類数の密度や，３次体の判別式，２次体のイデアル類群の３等分点の分布，４次体の判別式などがこれに該当する．ゼータ関数の関数等式を用いることから，概均質ベクトル空間に伴う指数和の情報が必要になる．上からの評価，あるいはより精密に明示公式を研究する．また自然な拡張として，基礎体を一般の代数体にした場合の相対２次，３次，４次拡大についても同様の問題が考えられる. Steinitz 類の分布の偏りなどが問題になる．このために，整数軌道の整数論的解釈を, Dedekind 環上に拡張する．

このゼータ関数を用いる方法では，主要項の係数はゼータ関数の留数になる．したがって新たに必要となる場合に留数計算を実行する．また留数の幾何学的な意味についても改めて検討し，代数的な解釈に繋げることができないか考える．

この一方で，代数的整数論によって関連付けられる密度定理相互の研究も行う．例えば, ３次非 Galois 拡大と非可換な６次 Galois 拡大の間には標準的な対応があるので，前者の密度定理から後者の密度定理を得ることを目指す．

概均質ベクトル空間でない場合も，余正則空間と関係する場合は，数の幾何を用いて興味深い密度定理が近年多く得られている．これらについて，数の幾何の方法を改良することにより，第二主要項を研究する．

他分野との関係では，代数幾何学との関係はもちろんだが，概均質ベクトル空間の場合は超局所解析との関連も考える．

４．研究成果

(1) 固定した代数体上 K で，相対３次拡大の判別式を数える関数の第二主要項を研究した．K が有理数体の場合は第二主要項の存在が示されていたが，その誤差項の評価を改良した．また，K が２次体の場合に第二主要項の存在を証明した．さらに，K が一般の代数体の場合も，数え関数を平滑化した場合は第二主要項が存在することを証明した．K の類数が３の倍数であるときに限り，第二主要項において Steinitz 類が等分布にならないことを見出した． ３次環の軌道解釈である Delone-Faddeev 対応を Dedekind 環上に一般化した以前の成果が有用であることも確かめられた．Manjul Bhargava 氏及び Frank Thorne 氏との共同研究である．この成果は論文にまとめている最中である．

(2) 非可換な６次 Galois 拡大の個数を数え

る関数で，第二主要項予想を定式化した．また，第三主要項が存在するかも知れないという仮説を立てた．等差数列中で考えた場合の微妙な偏りについても考察した．Frank Thorne 氏との共同研究である．成果は論文として出版された．

(3) ２次体のイデアル類群を数える関数の第二主要項を研究した．この場合は第二主要項のオーダーが小さく，現段階ではその存在を厳密に証明するのは難しいことが分かったが，ゼータ関数の極の情報から，第二主要項予想を定式化することができた．Frank Thorne 氏との共同研究である．

(4) 上述のような成果を得る上で往々にして問題になるのが，概均質ベクトル空間に伴う指数和の大きさを評価することである．これらについて多面的に検討しているうちに，指数和を明示的に求める簡単な手法を発見した．その方法に基づいて，比較的単純な１０種類程度の概均質ベクトル空間について，指数和の明示公式を得た．この計算の過程では，概均質ベクトル空間に特徴的な構造が鮮やかに現れる．超局所解析などの代数解析と関係する可能性もあり，今後さらなる研究を続けたいと考えている．指数和の計算の直接の応用として，概素数判別式をもつ３次体や４次体の個数の下からの評価が得られた．これは概素数で篩う必要があるが，特に Bhargava-Ekedahl の幾何篩を効果的に用いることができると考えられ，その改良を検討しているが，この研究は最終段階に近いと考えられる．Frank Thorne 氏との共同研究である．成果がまとまり次第，論文にまとめる計画である．

(5) 有理数体上の楕円曲線を高さで並べたときの２-Selmer 群の平均位数について，第二主要項を研究した．これは２変数４次形式の空間を使って研究することができ，それは概均質ベクトル空間ではないが，余正則空間になる．数の幾何を使って第二主要項について有用な知見を得た．現在も研究を継続している．Arul Shankar 氏との共同研究である．

(6) ある可約な１０次元の概均質ベクトル空間について，付随するゼータ関数を中心に研究した．これは２変数のゼータ関数である．現在のところ，以下のところまで研究が進んだ．

① 整数軌道の解釈により，これが「３次環のゼータ関数を数えるゼータ関数」であることが分かった．また和の順序を変えれば，２元３次形式の空間のゼータ関数を，レベル構造をつけて数えていることが分かった．

② 上記の結果に基づき，解析的性質を研究した．３次環のゼータ関数の解析接続と，２元３次形式の空間のゼータ関数の解析接続に基づいて，部分的な解析接続を得た．また，レベル構造をつけた２元３次形式の空間のゼータ関数について，留数を正確に決定した．

③ 局所ゼータ関数の明示公式について研究した．計算する方針をある程度立て，特に組み合わせ論的により明確な問題に書き直した．

これらの研究がさらに進めば，３次体のゼータ関数についての密度定理が証明できる見込みであり，現在も研究を続けている．Gautam Chinta 氏との共同研究である．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

① 谷口隆，Manjul Bhargava 氏の業績 -楕円曲線の平均階数と数の幾何-，数学, 68, 2016, pp. 72-82. (査読有)

② Yasuo Ohno and Takashi Taniguchi, Relations among Dirichlet series whose coefficients are class numbers of binary cubic forms II, Mathematical Research Letters, 21, 2014, pp. 363-378. (査読有) DOI: http://dx.doi.org/10.4310/MRL.2014.v21.n2.a12

③ 谷口隆, 3 次体の数え上げ，数理解析研究所講究録, 1898, 2014, pp.124-139. (査読無)

④ Takashi Taniguchi and Frank Thorne, An error estimate for counting S_3-sextic number fields, International Journal of Number Theory, 10, 2014, pp. 935-948. (査読有) DOI: http://dx.doi.org/10.1142/S17930424500080

⑤ Takashi Taniguchi and Frank Thorne, Orbital L-functions for the space of binary cubic forms, Canadian Journal of Mathematics, 65 2013, pp. 1320-1383. (査読有) DOI:

http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2013-027-0

⑥ Takashi Taniguchi and Frank Thorne, Secondary terms in counting functions for cubic fields, Duke Mathematical Journal, 162, 2013, pp. 2451-2508. (査読有)

〔学会発表〕（計２３件）

① 谷口隆, Average rank of elliptic curves-- the work of Manjul Bhargava --,Arithmetic and Algebraic Geometry 2016, 東京大学,（東京都） 2016 年 1 月 25 日.

② 谷口隆,楕円曲線の平均階数 - Manjul Bhargava のフィールズ賞受賞と今後の展望 -,日本数学会 2015 年度年会企画特別講演, 明治大学.（東京都）2015 年 3 月 24 日.

③ 谷口隆, Second order terms in some arithmetic functions, Prehomogeneous Vector Spaces and Related Topics (2014), 立教大学.（東京都） 2014 年 9 月 5 日.

④ 谷口隆, The zeta functions attached to prehomogeneous vector spaces, SMS2014 - Counting Arithmetic Objects, モントリオール大学.（カナダ） 2014 年 6 月 26 日.

⑤ 谷口隆, Cubic field discriminants in arithmetic progressions, 解析的整数論, 京都大学数理解析研究所,（京都府）2013 年 11 月 7 日

⑥ 谷口隆, Applications of Sato-Shintani's zeta functions for the space of binary cubic forms, Analysis, Geometry and Group Representations for Homogeneous Spaces,名古屋大学,（愛知県）2013 年 8 月 27 日.

⑦ 谷口隆, Orbital L-functions for the space of binary cubic forms and their applicationas, Combinatorics, Multiple Dirichlet series and Analytic Number Theory , ICERM, プロビデンス(米国). 2013 年 4 月 16 日.

⑧ 谷口隆, Counting cubic extensions over a number field, 代数的整数論とその周辺, 京都大学数理解析研究所,（京都府） 2012 年 12 月 7 日.

⑨ 谷口隆, Counting cubic extensions over a number field, Kyoto conference on automorphic forms, 京都大学,（京都府） 2012 年 10 月 6 日.

⑩ 谷口隆, Orbital L-functions for the space of binary cubic forms and their applications, Representation theory of algebraic groups and related topics, 城西大学,（東京都） 2012 年 9 月 16 日.

⑪ 谷口隆, Counting cubic fields and L-functions for the space of binary cubic forms, Workshop on arithmetic geometry and related topics, 京都大学,（京都府） 2012 年 4 月 9 日.

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/tani/index_j.html

６．研究組織
(1)研究代表者
谷口　隆（TANIGUCHI, Takashi）
神戸大学大学院・理学研究科・准教授
研究者番号：60422391