様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ９ 日現在

機関番号：１５４０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2012～2014
課題番号：２４６５４００７

研究課題名（和文）モチビックゼータの有理性

研究課題名（英文）Rationality of Motivic Zeta

研究代表者
木村　俊一（Kimura, Shun-ichi）
広島大学・理学（系）研究科（研究院）・教授
研究者番号：１０２８４１５０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：有限集合に対してその対称積の形式和を取ると有理関数になり、その分母の次数として有限集合の元の個数があらわれることが容易にわかる。有限体上の代数多様体の対称積の元の個数の形式和を取ると有理関数になる、というのが２０世紀代数幾何を大きく発展させる原動力となったWeil予想であるが、それに圏論的解釈を与える、という目標のもと、様々な圏において対称積の形式和（これをモチビックゼータと呼ぶ）の有理性を調べた。
代数多様体のモチーフでのモチビックゼータの一般化であるモチビックチャウ級数が有理的になったりならなかったりする現象を確認した。また箱玉系の母関数を定義し、有理的になると予想して特別な場合に証明した。

研究成果の概要（英文）：When X is a finite set, the formal sum of its symmetric products is rational, and the degree of its denominator is the number of the elements of X. When Y is an algebraic variety over a finite field, the rationality of the formal sum of the number of elements of its symmetric products is the celebrated Weil Conjecture, which promoted the advance of algebraic geometry in 20th century. The aim of this research is study the rationality of the formal sum of symmetric products (which is called the motivic zeta) in many categories.
We studied the rationality of the Motivic Chow Series, which is a generalization of the motivic zeta in the category of motives of algebraic varieties, and found that the rationality depends on the varieties and the equivalence relations, which implies the subtlety of this business. We also defined the generating function (expedited to be promoted to a version of motivic zeta), conjectured that it is always rational, and proved the rationality in some cases.

研究分野：代数幾何

キーワード：モチビックゼータ

１．研究開始当初の背景

代数多様体のモチーフに対して、研究代表者によるモチーフの有限次元性予想が基本的な予想である。これは元々、Mumford が発見した幾何種数正の代数曲面のチャウ群が「、無限次元的である」とする理論に対するアンチテーゼとして研究代表者が提唱した予想である。つまり、Mumford の幾何的な視点からすればチャウ群は無限次元的に見えるかもしれないが、「組み合わせ論的代数関係式」の視点から有限次元的だととらえるべきだ、とする予想である。モチーフとは本来「普遍コホモロジー」としてとらえられるべきであり、自然なコホモロジーは有限次元ベクトル空間であるべきだ、と思えば、ベクトル空間ではないにせよ、モチーフは有限次元的なふるまいをするべきで、それを定式化したのが有限次元性予想であると言える。有限次元性予想は、単に Mumford に対するアンチテーゼであるのみならず、有限次元性が証明されれば、Bloch-Beilinson によって予言されたモチーフのふるまいについての予想のかなり大きな部分がこの予想から従うことがわかってきた。例えば幾何種数０の代数曲面のチャウ群が Mumford の意味でも有限次元的である、とする Bloch の予想が、その曲面のモチーフが有限次元的であれば成り立つことがわかっている。
しかし有限次元性予想の証明は難しい問題で、多くの努力がなされているにもかかわらず、ここしばらくは本質的な進展はない。モチビックゼータの有理性はモチーフの有限次元性に極めて近い性質であることが知られているが、このように定式化すると代数多様体のモチーフ以外に対しても考察することができる。そこでモチビックゼータの有理性という視点から、同様の現象が数学の他の分野でも起こっているのかを調べる、という自然な問題が発生する。

２．研究の目的

様々な圏、様々な対象、様々な関係式において、モチビックゼータが有理的になるかどうかを調べる。特に、代数多様体のモチーフでは必ずモチビックゼータが有理的になると予想されているが、他の脈絡では有理的にならないケースがあるのか、もし有理的にならないケースがあるなら、その時に何か特別なことが起こっているのか、その状況を代数多様体のモチーフに戻した時にどう見えるかを調べたい。一方、代数多様体の有限次元性予想を仮定すると多くの事実が従うが、モチビックゼータの有理性というほぼ同様の設定のもとで、他の脈絡でも様々な波及効果があるかを調べる。
モチーフとは「普遍コホモロジーである」という視点からすると、これは代数多様体以外の圏の対象に対しても、有限次元コホモロジーを定義しよう、という試みであるとも解釈される。しかも、コホモロジーをどう定義するか、という一番やっかいな部分を棚上げして、もしもその対象に有限次元のコホモロジーが定義できるのであれば、それは何次元であるかがいきなりわかる、という理論であるので、実際に有限次元性が示された場合は、さらにそれを実現するベクトル空間での realization をみつけよ、というさらなる精密化が可能であることを示唆することになる。

３．研究の方法

代数多様体のモチーフのモチビックゼータは０次元のモチビックチャウ級数とみなせるが、１次元以上のモチビックチャウ級数が有理的になるかどうか、というのはモチビックゼータの一般化と見なすことができる。当初はモチビックチャウ級数が「高次モチーフ」としての役割を果たしているという作業仮説のもと研究を進めていたが、後述するとおり、通常のコホモロジーとはかなり異なるふるまいをすることが明らかになったので、その微妙な違いについても調べた。
また、グラフの圏などの離散的対象でのモチビックゼータを計算し、有理的になるかどうかを確かめた。特に箱玉系は可積分系の研究にあらわれる興味深い組み合わせ論的対象であるが、それに対して自然な母関数が定義できるので、その有理性も調べた。

４．研究成果

（１）モチビックチャウ級数の有理性については、対象、関係式に対して非常に敏感に振る舞うことが発見された。関係式なしではほとんどのモチビックチャウ級数が有理的でないことがわかっていたが、研究代表者と Elizondo 教授との共同研究で A^1-homotopy という関係式のもとでは全てのトーリック多様体に対してモチビックチャウ級数が有理的になることを証明した。
一方、研究代表者と黒田茂氏、高橋宣能氏との共同研究で、射影平面の一般９点ブローアップというかなりトーリック多様体に近い代数多様体で、モチビックチャウ級数が有理的にならないことが証明された。なお、この非有理性の証明は、べき級数の台がなす閉錐が有限生成でない、という弱い仮定から従うことを補題として証明しており、この補題そのものは本研究の枠を越えて応用があると期待される。
また、射影平面を９点でブローアップした場合、その９点が一直線上にある場合は、モチビックチャウ級数が有理関数になることが Elizondo 氏との共同研究でわかっていた。射影平面を９点でブローアップした多様体を X をおくと、X のモチーフはその９点の配置によらず一定である。これはこれまで考え

られている全てのコホモロジー理論において成り立つ事実であり、モチビックチャウ級数が代表する「コホモロジー理論」が多様体の微妙な性質に深く依存していることを示す重要な例である。

（２）箱玉系の母関数を定義して、その有理性について調べた。この振る舞いはモチビックゼータに似ており、適切な視点からモチビックゼータの特別な場合であると解釈されることが期待される。さて、この母関数は、適切な仮定のもと常に有理的だと予想し、特別な場合に証明を与えた。これは沖吉真実氏との共同研究である。

（３）有限次元性について、２つの対象が有限次元的であればそのテンソル積も有限次元的であることが知られているが、逆に有限次元的な対象とテンソルして有限次元的になるのであれば、元も有限次元的であるか、という問題を Tabuada 氏との共同研究で調べた。対象の場合は答えは YES だが、射に対しても有限次元性を定義することができて、その場合は NO となることがわかった。

（４）木村健一郎氏、高橋宣能氏との共同研究で、一般の Additive Monoidal Category において、有限次元性とモチビックゼータの有理性との微妙な違いについて調べた。モチビックゼータの有理性について様々な定義がありうることが問題を複雑にする。Schur 有限次元な対象に対して Determinatal Rational という有理性は常に成り立つが、Uniform Rational という有理性を持たない例を構成した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

1. S. Kimura, S. Kuroda, N. Takahashi, The closed cone of a rational series is rational polyhedral, J. of Algebra 405 (2014) 243-258（査読あり）

2. K. Kimura, S. Kimura, N. Takahashi, Motivic zeta functions in dditive monoidal categoryes, Journal of K-theory 9 (2012) 459-473 （査読あり）

3. J. Elizondo, S. Kimura Rationality of Motivic Chow Series Modulo A^1-homotopy, Adv. in Math. 230 (2012) 876-893（査読あり）

〔学会発表〕（計１０件）

１. 木村俊一、Shanks の等式とその一般化、2 out of 3 properties、第２回岡山−広島代数学シンポジウム、広島大学、2015 年 3 月 27 日

2. 木村俊一、Infinitesimal rationality of motivic zeta, Arithmetic and Algebraic Geometry 2015、東京大学、2015 年 1 月 27 日

3. 木村俊一、数学と暗号の接点〜代数曲線、有限体、そしてモチビックゼータ、SCIS2015 The 32nd Symposium on Cryptography and Information Secruity, リーガロイヤルホテル小倉（福岡県北九州市）2015 年 1 月 22 日

4. 木村俊一、圏論的有限次元性入門、広島組み合わせ論セミナー、広島工業大学、2014 年 11 月 10 日

5. 木村俊一、Infinitesimal rationality of Motivic Chow Series, 函館数論幾何ワークショップ、北海道教育大学函館校、2014 年 5 月 26 日

6. 木村俊一、Rationality and irrationality of Motivic Chow Series, 代数幾何学城崎シンポジウム、城崎大会議場（兵庫県豊岡市）、2013 年 10 月 22 日

7. 木村俊一、ベキ級数の有理性について、岡山大学 CORE セミナー、岡山大学 2013 年 3 月１３日

8. 木村俊一、圏論的有限次元性入門、香川セミナー、香川大学、2013 年 2 月１６日

9. 木村俊一、箱玉系の母関数、鹿児島大学談話会、鹿児島大学、2012 年 11 月６日

10. 木村俊一、箱玉系の母関数、東京大学月曜特異点セミナー、東京大学 2012 年 8 月６日

〔図書〕（計　２件）

1. 木村俊一、共立出版、ガロア理論、2012 年、２１６ページ

2. 木村俊一、講談社、連分数のふしぎ、2012 年、３２８ページ

〔産業財産権〕
○出願状況（計　０件）

名称：
発明者：
権利者：

種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
　木村俊一　（KIMURA, Shun-ichi）
広島大学・大学院理学研究科・教授
　研究者番号：１０２８４１５０