

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 23 日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2012～2014

課題番号：24654011

研究課題名(和文)無限単純群の群作用

研究課題名(英文)Actions of infinite simple groups

研究代表者

坪井 俊 (Tsuboi, Takashi)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：40114566

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：無限単純群は自然に空間への作用を持つことが多い。一方、無限単純群 $G$ の単位元ではない1つの元の共役類とその逆元の共役類の和集合の集合 $X$ を考えると、その2つの集合たちの間には、一方のべき乗が他方を含むという現象が起こる。これにより、 $X$ に距離を定義することができる。この距離の性質を、単純群の作用を用いて解明する研究を行った。群 $G$ の逆について閉じている非自明な部分集合 $K$ をとると、 $G$ の元は $K$ の元の共役の積に書かれ、その最小個数が $G$ 上にノルムを定める。このノルムおよび $G$ 上の擬準同型と $X$ 上の距離との関連が明らかになった。また、ある種の同相群ではすべての元が1つの交換子となることを示した。

研究成果の概要(英文)：There are many infinite simple groups which have natural actions on spaces. Consider the set  $X$  of the unions of the conjugate classes of a nontrivial element and its inverse in an infinite simple group  $G$ . For 2 such unions, one union is always contained in a power of the other. This phenomenon gives rise to a metric on  $X$ . We studied properties of this metric on  $X$  by using the action of  $G$  on some space. For a nontrivial subset  $K$  which is closed under taking inverses, any element of  $G$  can be written as a product of conjugates of elements of  $K$ . The minimal number of conjugates defines a norm on the group  $G$ . We clarified the relationship between the metric on  $X$  and the norm and quasimorphisms on  $G$ . We also showed that in certain homeomorphism groups, every element can be written as one commutator.

研究分野：位相幾何学

キーワード：幾何学 代数学 トポロジー 微分同相群 幾何学的群論 無限単純群

## 1. 研究開始当初の背景

無限群を研究する標準的な方法のひとつは、その無限群からよくわかる別の群への準同型を作る、あるいは、その無限群の部分群を調べることである。しかし、この試みは無限単純群に対しては、うまくいかない。このような無限単純群に対しても有効な群の幾何的研究をおこなうことが必要である。完全群に対して、群から実数への擬準同型が幾何的に定義され、重要な研究が Gromov, Ghys, Bavard, Polterovich, Calegari, 藤原たちによってなされてきた。特に、最近、無限単純群で擬準同型をたくさん持つものも見つかってきている。

以前の研究で、単純群  $G$  の単位元以外の元  $g$  に対して、 $g$  と  $g^{-1}$  の共役類の和集合  $C_g$  を考え、集合  $C_G = \{C_g \mid g \in G\}$  上に距離  $d$  を  $d(C_{g_1}, C_{g_2}) = \log \max\{\min\{k \mid g_1 \in (C_{g_2})^k\}, \min\{k \mid g_2 \in (C_{g_1})^k\}\}$  で定義し、その基本的な性質を明らかにしてきた。最近、児玉大樹により、無限交代群  $A = \lim_n A_n$  に対し、 $C_G$  は、半直線と擬等長であることが示された。また、球面の向きを保つ同相の群について研究し、その任意の元がただ一つの交換子で書かれることを見出した。この結果は、 $C_G$  の中に位相双曲的な元の共役類  $C_h$  という特別なものがあり、ここから、 $G = (C_h)^2$  となることを示している。これは、力学系が同じ性質を持つことが位相共役により記述されることに基づき、位相双曲的作用の力学系的性質に着目して得られたものである。そこで群作用の力学系的性質から研究を進める必要が生じた。

## 2. 研究の目的

無限単純群の元の様々な空間への作用の力学系的性質から、単純群の共役類の対称化の上に定義した距離  $d$ 、安定交換子長などの単純群上の擬ノルム、実数へのさまざまな擬準同型などの情報を取り出す手法を確立し、無限単純群の「形」を理解する方法を確立する。特に、無限交代群  $A$  における結果、作用の台の大きさが定義できるときの結果をもとに、様々な同相群、Thompson 型の有限表示無限単純群、最近得られた擬準同型を豊富に持つ無限単純群などについて、それらの「形」を理解する。

## 3. 研究の方法

(1) 群から実数への擬準同型、群の有界コホモロジー、群の上の(共役不変)擬ノルム、群の元の交換子長、安定交換子長などと群作用の力学系的性質の関連についての情報を整理した。特に、Calegari、藤原、Kotschick の擬準同型、安定交換子長の研究、Burago-Ivanov-Polterovich の擬ノルム、交換子長の研究との関連を研究した。

(2) 単純群の元  $g$  と  $g^{-1}$  の共役類の和集合  $C_g$  とするとき、 $k(g_2 \in (C_{g_1})^k) = \min\{k \mid g_1 \in (C_{g_2})^k\}$  について、群作用の力学系的性質との関連を考察した。

(3) 無限交代群  $A$  に対して、 $C_G$  が半直線と擬等長であるという児玉大樹の結果を吟味し、共役類にその台の大きさが定まる場合に対し、この結果の拡張を検討した。距離だけではなく、 $k(g_2 \in (C_{g_1})^k)$  に対して、結果の精密化を考察した。

(4) 微分可能性を仮定しない同相のなす群についての群の一樣完全性、一樣単純性について考察した。球面の向きを保つ同相写像の群の交換子幅が 1 であるという結果の、さらに広い空間の同相群に対しての成立、不成立を検討した。

(5) 微分同相群の恒等写像成分についての結果を整理した。距離  $d$  が有界とわかっている場合、すなわち、コンパクト連結奇数次元多様体、コンパクト連結偶数次元多様体について、距離  $d$  についての直径の評価の精密化を検討した。

(6) 体積を保つ微分同相群、シンプレクティック微分同相群、ハミルトン微分同相群について、元の台、部分集合の移動可能性について整理した。このような群には、単純であり、一樣完全であるが、一樣単純でないものがあるので詳しく検討した。

(7) 有限生成無限単純群のリストを整理した。有限生成群に対して、群の元を生成元集合の元をアルファベットとするワードで書いたときにその中に現れるアルファベットの個数から定義される擬準同型を、特に、Thompson の群として知られる有限表示群に対して、関数  $k(g_2 \in (C_{g_1})^k)$ 、距離  $d(C_{g_1}, C_{g_2})$  との関連を考察した。

(8) 幾何学的群論、微分同相群、シンプレクティック幾何、群論、グラフ理論、力学系理論、変換群などの研究者と情報の交換をおこなった。若手の研究者に対してのセミナーを行った。また、この研究に関係の深い研究を現に進めている Ghys, Bavard, Calegari, 藤原, Kotschick, Polterovich その他の研究者と密接な研究情報の交流をおこなった。特に、2013 年 7 月に釜山で開催された Asian Mathematical Conference 2013 国際会議、2013 年 9 月に東京で開催された Geometry and Foliations 2013 国際会議、2014 年 8 月にソウルで開催された国際数学者会議 ICM2014 において研究交流を行った。2015 年 3 月に伊東市で、研究を総括し、今後の研究方向を探るための研究連絡会を行った。

(9) 本研究の研究成果は、2012年7月にポーランドのKrakowで行われた第6回ヨーロッパ数学会議、2012年12月にアメリカ合衆国のCalTechで行われたCalTech数学セミナー、2013年2月に鹿児島大学で行われた第8回代数・解析・幾何学セミナー、2013年9月に東京大学で行われたGeometry and Foliations 2013国際会議で発表した。

#### 4. 研究成果

(1) 球面の同相写像の群およびメンガー空間の同相写像の群と同様に球面から構成されるシェルピンスキー空間の同相群について研究した。2次元のシェルピンスキー空間は各点の近傍がシェルピンスキー・カーペットと同相のものである。高次元の場合にも同様に構成される。この空間には、その境界をなす円周に円板を貼り付けた閉曲面が対応するが、2次元の場合にこれが球面になる場合、高次元の場合にも、その境界をなす球面に円板を貼り付けて高次元球面が得られる場合を扱った。この空間の向きを保つ同相群についても、交換子幅が1になることがほぼ示した。すなわちすべての同相写像は、ただ1つの交換子として書かれる。このことは、通常の球面と同じように北極南極に湧点と沈点をもつ典型的同相写像が存在していることを用いて示される。

(2) Burago-Ivanov-Polterovichにより、群Gの部分集合KでGをKの元の共役がGを生成するものについて、Gの元gを書くために必要な共役の個数の最小値 $q_K(g)$ が群Gのノルムとして定義されている。単純群Gに対しては、非自明な元とその逆元の集合 $\{f, f^{-1}\}$ はGを生成する。これにより定義される $q_{\{f, f^{-1}\}}(g)$ を用いて、

$$d(C_f, C_g) = \log \max\{q_{\{f, f^{-1}\}}(g), q_{\{g, g^{-1}\}}(f)\}$$

のように表示されることがわかった。群のノルムの理論との関連が明らかになった。また、 $\{f, f^{-1}\}$ 上で自明となる非自明な擬準同型の存在がわかれば、 $q_{\{f, f^{-1}\}}$ が非有界であることがわかる。これらについてGeometry and Foliations 2013国際会議で講演した。内容は出版予定である。

(3) 体積を保つ微分同相、測度を保つ同相写像について研究し、体積や測度が有限の場合においては、距離dが有界になる場合があることが予想できるようになった。Fathiによる3次元以上のコンパクト多様体のルベグ測度を保つ同相写像の群については、交換子幅は有界であることが予想できるようになった。

(4) コンパクトn次元多様体Mで指数n/2のハンドルを持たないハンドル分解を持つも

の微分同相群を研究した。その恒等写像の連結成分のなす群の交換子幅の評価が、奇数次元の場合5から4に、偶数次元の場合、4から3に改良できた。この結果は出版予定である。すなわち、m次元ハンドルを持たないハンドル分解を持つ2m次元多様体の恒等写像にアイソトピックな微分同相は、高々3個の交換子の積に書かれる。また2m+1次元多様体の恒等写像にアイソトピックな微分同相は、高々4個の交換子の積に書かれる。この結果の証明のためには、多様体の一般化されたHeegaard分解をとった時に、2つの一般化されたハンドル体のコアの補集合の上のフローの作用を用いる。コンパクトな台をもつ微分同相がその台を交わらないように写す微分同相を許容する場合に、一般的議論から高々2個の交換子の積に書かれるが、微分可能性を保ったまま、ただ1個の交換子に書く方法は見つかっていないが、交換子3個の積になったものが2個の積に書かれる可能性について検討した。

(5) 群の作用の研究のために、基本領域の形に興味を持ち、様々な群作用の基本領域の模型を3Dプリンタで作成した。特に、砂田利一氏が研究しているK4格子について、その基本領域を作成し、右手型、左手型を確認した。この基本領域の持つ意味について砂田氏をはじめとする研究者と検討した。この基本領域についてはソウルで開催されたICM2014において、Seoul Intelligencer誌にこの研究に関連する群の幾何、特に基本領域の形状についての研究のアウトリーチについて、文章を出版した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

1. Takashi Tsuboi: Several problems on groups of diffeomorphisms, to appear in *Geometry, Dynamics, and Foliations 2013*. Adv. Stud. Pure Math., Math. Soc. Japan. 査読有
2. Takashi Tsuboi, Homeomorphism groups of commutator width one, *Proceedings Amer. Math. Soc.*, 141, (2013), 1839-1847. DOI:10.1090/S0002-9939-2012-11595-3 査読有
3. Yoshihiro Ohta, Akinobu Nishiyama, Yoichiro Wada, Yijun Ruan, Tatsuhiko Kodama, Takashi Tsuboi, Tetsuji Tokihiro, and \*Sigeo Ihara, Path-preference cellular-automaton model for traffic flow through transit points and its application to the transcription process in human cells, *Physical Review E*, 86(2012)021918(11). DOI:10.1103/PhysRevE.86.021918 査読

有

〔学会発表〕(計4件)

1. Takashi Tsuboi, Several problems on groups of diffeomorphisms, Geometry and Foliations 2013, 2013.9.11, 東京大学数理科学研究科, 国際会議招待講演
2. Takashi Tsuboi: Commutator width of Diffeomorphism groups, 第8回代数・解析・幾何学セミナー, Kagoshima, 2013.2.21, 学会招待講演
3. Takashi Tsuboi, Homeomorphism groups of commutator width one, CalTech Seminar, CalTech., (アメリカ合衆国). 2012.12.17, 招待講演
4. Takashi Tsuboi, Homeomorphism groups of commutator width one, Geometry in Dynamics - Satellite Thematic Session, 6th European Congress of Mathematics, Krakow, ポーランド, 2012.7.1. 国際会議招待講演

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者

坪井 俊 (TSUBOI Takashi)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号：40114566

(2)研究分担者

( )

研究者番号：

(3)連携研究者

( )

研究者番号：