

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 5 日現在

機関番号：17102

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2012～2014

課題番号：24654013

研究課題名(和文) A ホモトピー代数とホッホシルトホモロジー

研究課題名(英文) A-infinity homotopy algebra and Hochschild homology

## 研究代表者

岩瀬 則夫 (IWASE, Norio)

九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：60213287

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：A 構造の概念に内在する本質を位相小圏として抽出し圏論的に定式化することにより、A 構造の高度に抽象化された定義を与えた。この考え方から A 構造の単位元の問題を解決できたと考えている。その位相小圏の本質は Associahedra と Multiplihedra であり、本研究では、空間の A 構造に対して与えられる二分木と Associahedra の関係の具体的な記述を踏まえ、写像の A 構造に対しても髭付き木を導入し、Multiplihedra との関係髭付き木の言葉から得られる重み列を用いて記述した。また L-S カテゴリーや位相的複雑さあるいは余ホップ構造の研究へも A 構造の視点から貢献した。

研究成果の概要(英文)：I introduced small topological categories to abstract the essential ingredients from the notion of A-infinity structure to obtain its highly abstract definition, which is established in terms of category theory. I believe that the unit problem in A-infinity structure is resolved in positive by using this idea.

The main ingredients in the small topological categories are Associahedra and Multiplihedra and, in this research project, we enlarge a concrete description of the relationship between Associahedra and trivalent trees to another concrete description of the relationship between Multiplihedra and bearded trees using sequence of weights obtained from words spoken by the bearded trees.

This research program also offered an important view point to the study of L-S category, topological complexity and co-Hopf structure.

研究分野：代数的位相幾何学

キーワード：A 構造 A 圏 A 作用 二分木 髭付き木

### 1. 研究開始当初の背景

A 構造の理論は 1960 年代に遡る古くて新しい話題である。最初の大きなインパクトは 1963 年の Stasheff による空間に対する operad (Associahedra と呼ばれる) の構成とこれを用いた A 構造の構築である。その後 1983 年に本研究代表者が写像に対する operad (Multiplihedra と呼ばれる) の構成に成功し、写像の A 構造を構築した。これらが代数的ホモトピー論の様々な問題に応用可能であることが次第に明らかとなり、特に Lusternik-Schnirelmann カテゴリ数の決定に対して非常に有効な理論的背景を与えるものである。特にこの A 構造の方法により、Ganea 予想として 1971 年から知られていた問題が 1998 年と 2001 年の研究代表者の発表論文により解決し、Lie 群のカテゴリ数の決定が飛躍的に進んだ。

しかし、その一方で、代数的な枠組みにおける A 構造がやはり Stasheff により与えられ、これを基礎に用いて深谷賢治氏がいわゆる A 圏の一種として深谷圏を与えたことは良く知られている。しかしながら、ここで次の問題が生じた。すなわち、代数的な A 圏のベースとなり得る位相的な A 圏とは何かという問いであり、また代数的あるいは位相的な A 関手とは何かという問いである。これが本研究の背景である。

### 2. 研究の目的

位相幾何学的対象の重要と考えられてきた不変量はその多くがホモトピー不変であると考えられ、これまで幾多の計算可能な不変量が作られて、それらが様々な位相的あるいはホモトピー論的性質をコントロールすることが示されてきた。その様なホモトピー不変となる不変量に対する代数的に完全な記述を与える為に、申請者は A 代数を E 余代数上に定義し、そこから導かれる射影構造を与えたが、A 代数のホモトピー代数としての性質を調べることを目的とする。その先にはスペクトル系列の E2 項としての Hochschild homology が見えてくると考えられる。それは有理ホモトピー論において free loop space のコホモロジーが Hochschild homology を用いて記述される状況に依っている。本研究では A 代数から得られる two-sided bar 構成を用いてこの関係をあきらかにすることを当初の目的とした。

### 3. 研究の方法

本研究の遂行には膨大な計算とともに、Grothendieck topos の類比としての圏論的な記述を精密化する必要があることが判明し、基礎理論の構築に非常に大きな時間を取られることとなった。特に代数的な議論と位相的な議論の整合性を取る為に新しい枠組みの構築そのものをまず目指す方向に軌道を修正し、同時に A 関手のホモトピー単位

元について考察する。その一方で、A 構造の代数的な不変量として cup-length や weight などの L-S カテゴリ数の lower bound が知られており、これらと hochschild homology との関連を調べる。

### 4. 研究成果

1) A 構造の代数的な議論と位相的な議論との整合性を取る為の考察の中から、髭付きの木のアイデアを得た。髭付きの木の話す言葉が Multiplihedra の頂点を与え、その凸包として Multiplihedra そのものを得ることができた。このアイデアは、通常二分木から Associahedra が現れる process と一見平行的であるが、前者は髭付きの木の話す言葉の alphabet に対する weight の概念を新たに必要とする。これにより、長く並立したままであった、木構造を用いた A 構造の抽象的な operad と本研究代表者の original であるユークリッド空間内に具体的に構成された operad との間の単純かつ自然な対応関係が得られたことになる。また、A 構造の圏論化の過程で、ホモトピー単位元の存在が厳密な単位元の存在を (ホモトピー同値を除いて) 意味するという結論を得ており、これは Stasheff による 1970 年代に与えられた A 構造の二つの定義の同値性を証明するものである。これらの結果はまとめて 50 頁程の長さの論文となり、現在投稿中で、査読と論文修正のプロセスにある。

2) 京都大学の蔦屋氏と共同で、A 関手についても同様の結果が得られたと認識しているが、まだプレプリントの段階である。

また以下の研究でも、A 構造に関する本研究からの成果が部分的に用いられている。  
3) Stasheff による A 構造の応用として、Milnor-Stasheff filtration を用いた cyclic map の研究を Mimura, Oda, Yoon 氏らと共同で行い、代数的な観点からの例を導出してこれに貢献した。

4) fibrewise な A 構造への応用として、久留米工業高等専門学校の酒井氏と共同で位相的複雑さを考察した。位相的複雑さは自由ループ空間の A 構造を考えることで L-S 理論に自然に包含されることが判明したが、これらは多くの variant を持つことが分かり、それらの関係を与えた。

5) スペインの Costoya 氏と共同で、空間の L-S カテゴリ数が 1 である為の一つの必要十分条件として、その空間の局所化の L-S カテゴリ数がすべて 1 以下であるという事実が得られた。ここでも、射影直線のアイデアを本質的に用いている。

6) 福岡大学の宮内氏と共同で、 $S_0(n)$  のループ空間の A 構造に着目してその L-S カテゴリ数を  $n=10$  の場合に決定した。この結果はこれまでに知られている  $n=9$  までの結果と同様にコホモロジーの環構造から得られる cup-length に一致するものであり、 $S_0(n)$  の

カテゴリ数の一般的な解決に向けての一步となると認識している。その証明にはA構造から得られる射影空間の複雑な組み合わせが本質的に重要であり、24頁程の長さの論文となり、現在投稿中で査読と論文修正のプロセスにある。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3件)

N. Iwase, M. Mimura, N. Oda, Y. S. Yoon; "The Milnor-Stasheff filtration on spaces and generalized cyclic maps", 査読有, Canadian Mathematical Bulletin 55 (2012), 523-536.

N. Iwase, M. Sakai; "Erratum to 'Topological Complexity is a Fibrewise L-S Category'", 査読有, Topology and its application 159 (2012), 2810-2813.

N. Iwase, C. R. Costoya; "Co-H-Spaces and almost localization", 査読有, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2), 58 (2015), 323-332.

[学会発表](計 18件)

岩瀬則夫; "A<sub>n</sub> structures on spaces and coalgebras", 東京都市大学数理科学セミナー, 2012年05月26日~2012年05月26日 (東京都市大学)

岩瀬則夫; "A<sub>n</sub> structures on spaces and coalgebras", 九州大学トポロジー金曜セミナー, 2012年07月20日 (九州大学)

N. Iwase; "On the equivariant systolic category", 6th European Congress of Mathematics (招待講演), 2012年09月03日~2012年09月03日 (Krakov, Poland)

N. Iwase; "Associahedra, Multiplihedra and units in A<sub>n</sub> form", Topology Seminar, Universidade de Santiago de Compostela (招待講演), 2012年11月27日~2012年11月27日 (Santiago de Compostela, Spain)

N. Iwase; "Associahedra, Multiplihedra and units in A<sub>n</sub> form", Topology Seminar, Universitat Autònoma de Barcelona, (招待講演), 2012年11月30日~2012年11月30日 (Barcelona, Spain)

N. Iwase; "Associahedra, Multiplihedra and units in A<sub>n</sub> form", Topology Seminar, Universidad de Malaga (招待講演), 2012年

12月05日~2012年12月05日 (Malaga, Spain)

N. Iwase; "How trees make a shadow in the lattice", Topology Seminar, University of Southampton (招待講演), 2012年12月11日~2012年12月11日 (Southampton, United Kingdom)

N. Iwase; "Associahedra, Multiplihedra and units in A<sub>n</sub> form", Topology Seminar, University of Aberdeen, 2012年12月20日~2012年12月20日 (Aberdeen, United Kingdom)

N. Iwase; "A<sub>n</sub> structures on coalgebras", Topology Seminar, University of Glasgow (招待講演), 2013年01月07日~2013年01月07日 (Glasgow, United Kingdom)

N. Iwase; "Associahedra, Multiplihedra and units in A<sub>n</sub> form", Discrete Geometry and Dynamical Systems (招待講演), 2013年01月22日~2013年01月22日 (京都大学)

N. Iwase; "Associahedra, Multiplihedra and units in A<sub>n</sub> form", International Conference on Topology and Geometry 2013 Joint with the 6th Japan-Mexico Topology Symposium, 2013年09月06日~2013年09月06日 (島根大学)

N. Iwase; "On Lusternik-Schnirelmann category of SO(10)", ホモトピー論シンポジウム, 2013年10月03日~2013年10月03日 (岡山大学)

N. Iwase; "Associahedra, Multiplihedra and units in A<sub>n</sub> form", 5th East Asian Conference of Algebraic Topology (招待講演), 2013年12月06日~2013年12月06日 (Chinese Academy of Sciences, Beijing, China)

N. Iwase; "A new definition of differential forms in diffeological spaces", Diffeology in Karatsu, 2013年12月21日~2013年12月21日 (唐津市市民プラザ)

岩瀬則夫; "A new definition of differential forms in diffeological spaces --- 同変 de Rham 理論を目指して", 不動点定理とその周辺, 2014年03月09日~2014年03月10日 (奈良女子大学理学部)

N. Iwase; "Differential forms in diffeological spaces", ICM Satellite Conference on Algebraic Topology at Dalian, 2014年08月09日~2014年08月14日 (Dalian,

China)

岩瀬 則夫; “Differential forms in diffeological spaces”, 東京大学トポロジー-火曜セミナー, 2014年12月16日~2014年12月16日(東京大学, 東京都)

泉田信行 岩瀬則夫; “Diffeological space上の de Rham theory”, 福岡ホモトピー論セミナー, 2015年1月11日~2015年1月11日 (奈良女子大学理学部)

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
取得年月日:  
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等  
<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

岩瀬則夫 (IWASE NORIO)  
九州大学 数理学研究院 教授  
研究者番号: 60213287

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号:

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号: