

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 24 日現在

機関番号：13901

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2012～2013

課題番号：24654021

研究課題名(和文)量子論の实在論的解釈を目指した量子集合論の研究

研究課題名(英文) Study of Quantum Set Theory Aiming at an Interpretation of Elements of Reality in Quantum Theory

研究代表者

小澤 正直 (OZAWA, Masanao)

名古屋大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：40126313

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円、(間接経費) 900,000円

研究成果の概要(和文)：量子論における物理量の値に实在論的な解釈を与えることは、物理学と哲学の両分野にまたがる永年の未解決問題とされてきた。本研究では、この問題の解決に向けて、量子集合論に基づく新しいアプローチを提案した。そのために、量子集合論と量子論の様相解釈の関係を明らかにして、フォン・ノイマン環が所与の状態について存在可能量部分環になる条件と量子集合論の部分普遍類が所与の状態でZFC集合論の定理をすべて充足する条件との同値性を示した。また、二つの物理量の量子完全相関と量子集合論における二つの量子実数の相等性の間の同値性を利用して、射影測定に対する様相解釈による従来の非崩壊解釈を一般化測定に拡張した。

研究成果の概要(英文)：It is one of long-standing open problems in the field across physics and philosophy to give a realistic interpretation for values of quantum observables. In this research we proposed a new approach to this problem based on quantum set theory. We studied the relationship between quantum set theory and modal interpretation of quantum theory, and we showed the equivalence between the condition for a von Neumann algebra to be a beable algebra for a given state and the condition for a subuniverse of quantum set theory to satisfy all the theorems of ZFC set theory in that state. We also extended the conventional no collapse interpretation for projective measurements to a no collapse interpretation for arbitrary generalized measurements by using the equivalence between quantum perfect correlation for two observables and the quantum-set-theoretical equality for two real numbers in quantum set theory.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：量子集合論 数学基礎論 数理物理学 科学哲学 様相解釈 量子力学 代数的場の量子論 量子測定

1. 研究開始当初の背景

(1)量子力学基礎論では、1935年の「アインシュタイン-ポドルスキー-ローゼン(EPR)のパラドックス」の発見以来、「隠れた変数理論」の可能性に関する研究が盛んに行われて来た。1967年に「コッペン-シュベッカーの定理」が発見されて以来、この問題に対して量子論理が重要な役割を果たしている。1964年に発見された「ベルの不等式」の実験的検証に成功した1980年代前半以降、量子物理量の値の实在論的解釈を巡り活発な研究が展開されている。とりわけ、量子論理への様相論理的アプローチから導かれた量子力学の「様相解釈」が1970年代にファン・フラセンによって提案され、それを巡り、今日まで量子力学の解釈に関する多くの研究がなされた。この研究の到達点と見なされるバブ-クリフトンによる「非崩壊解釈の一意性定理」は、同時に実在的な値を所有できる量子物理量の極大集合を特徴付ける。1999年にハルヴォーン-クリフトンにより作用素環的な定式化が得られ、現在、この定理の代数的場の量子論への拡張が試みられている。

(2)量子集合論は、バーコフとフォン・ノイマンの「量子論理」と連続体仮説の独立性証明でコーエンにより導入された「強制法」を起源に持つ。強制法は、1970年代以後、数学の他の概念と結びつき、概念的深化がなされた。その1つに、「層」の概念と「非標準論理」に基づく集合概念の結びつきがあり、集合論の「ブール代数值モデル」から、「トポス」、「直観主義的集合論」をへて、1978年に竹内外史によって「量子集合論」が導入された。量子集合論は、量子論理に基づく数学を極めて自然な形で導出すると予想され、その基盤の上に量子力学を再構築することは、量子力学基礎論における強力なプログラムと見なされてきた。

(3)しかし、その後、本研究代表者の研究が現れるまで、量子集合論の研究は、長いこと停滞していた。その理由として、ギピンズは、著書『量子論理の限界』で竹内の論文を引用しつつ、量子集合論が、等号の推移律や代入規則が一般には成立しないなど極めて不規則な体系であると同時に、多くのブール代数值モデルを内部モデルとして含み、そこではZFC集合論が成立するという極めて複雑な構造を持つことを指摘し、量子論理に基づく数学の圧倒的複雑さにあると述べている。

(4)本研究代表者は、1980年代から集合論の強制法を数学、特に、解析学に系統的に応用するために「ブール代数值解析学」を研究した。それにより、1952年以来未解決だった「I型AW*-環」(「フォン・ノイマン環」の代数的一般化)の分類に関する「カプランスキー予想」を、1984年に「基数崩壊」の現象を利用して解決し、I型AW*-環の分類を完成させた。これらのブール代数值解析学の研究により、集合論のブール代数值モデルを一般化した量子集合論を展開し、量子力学に応用する手法

を確立した。

(5)一方、本研究代表者は、作用素環上の「完全正值写像」の研究から、1984年に「量子測定概念の数学的特徴付けの問題」を解決して、量子測定理論の基礎を確立し、1988年には、この理論により「重力波検出限界」に関する論争を解決した。2003年には、この理論に基づき、「ハイゼンベルクの不確定性原理」を打破する測定のモデルを示し、新たに測定と擾乱に関する「普遍的な不確定性原理」を確立した。この不確定性原理の新しい定式化から、「量子完全相関」の概念を導入し、量子集合論における相等関係との類似性から、量子集合論に基づいて量子力学の解釈を拡張するという本研究の基本的着想を得た。

(6)この着想に基づいて、科研費萌芽研究の助成を受け、2006-2007年度には、フォン・ノイマン環の射影束を論理とする量子集合論のモデルの研究を行い、ZFC集合論の定理の有界論理式に対する移行原理、量子集合論内の実数論とフォン・ノイマン環に付随する自己共役作用素の理論の同等性などの結果を得た。2008-2009年度には、量子論理を任意の完備オーソモジューラ束に拡張し、完全に一般的な定式化の下で、ZFCの定理の移行原理を一般の非有界論理式に拡張した。また、2010-2011年度には、代数的量子論における様相解釈を量子集合論に拡張、整備し、ボアとアインシュタインの論争におけるボアの実在性基準を数学的に再構成した。これらの成果により、量子力学及び場の量子論の観測命題の全体を量子集合論の論理式に埋め込んで、観測命題の範囲と解釈を系統的に拡大するという研究方法が確立された。

2. 研究の目的

(1)本研究は、量子力学と集合論というこれまで全く接点がなかった二つの分野を横断する学際的研究という点に特色がある。量子力学の实在論的解釈を量子論理により実現し、量子情報など現在の物理学で最も研究が活発な分野に数学基礎論の概念と方法を導入し、新しい数学理論を開拓することを目標とする。

(2)レッド・ヘッドは、著書『不完全性・非局所性・实在主義』で、量子力学の实在論的解釈に対する量子論理に基づくアプローチを検討して、本質的な解決を導かないと批判している。しかし、この批判は、従来の量子論理の研究が命題論理に留まって、物理量の間関係を扱うことができなかつたことに由来すると考えられる。本研究は、量子集合論における実数と量子物理量の対応を利用して、実数論における実数の間関係から直ちに量子物理量の間量子論理的関係が導かれるという全く新しい論理学的方法の提案を行なうものであり、これまでの研究で解明できなかった量子力学の实在論的解釈を実現するために、量子力学と集合論というこれまで全く接点がなかった二つの分野を横断する学際的研究の新しい方法を提案する。

(3)そのために、量子集合論内の実数論を量子測定理論に応用することにより、量子測定の概念を含む広い範囲の観測命題に量子論理に基づく統一的な解釈を導入する。この量子集合論的解釈から自動的に実在論的解釈の文脈依存性が導かれ、様々な文脈を統一する量子論理の役割が明らかにされる。この方法を作用素環に基づく代数的量子力学の方法と結合させ、従来、同等とされていた量子物理量の同時決定可能性と同時測定可能性との概念的差異を明らかにして、観測問題や EPR パラドックスを解明する。

(4)量子力学の基礎に関しては、これまで、ヒルベルト空間論、作用素環論、および、射影幾何や連続幾何と結びついた束論によるアプローチがあったが、本研究は、量子集合論という全く新しいアプローチを開拓して、量子集合論が作用素環論や束論等の数学的表現力を上回る強力な数学理論であることを明らかにして、新しい原理の発展や斬新な着想や方法論の提案を行うものである。

(5)一方、千谷らによって、竹内と異なる含意結合子の下で量子集合論と類似の研究が進められている。しかし、その含意結合子は、0と1の2値しか取らないトリビアルなもので、それを量子集合論と呼ぶことには異論がある。また、量子論的集合概念への異なるアプローチとして、1990年代から C. マルヴェイによるクォンテール上の集合概念の研究、および、アイシャムとデアリングによるトポスによる量子力学の再構築が試みられている。これらは、トポスの2つの異なる非可換拡張と考えられるが、本研究のような高階の集合論は未構築で、実数論を展開し、量子力学に応用するレベルには至っていない。本研究は、量子情報理論や量子力学の様相解釈などの最新の成果を援用することで量子集合論のあるべき姿を構想し、上記の困難を克服して、量子集合論を展開し、量子力学の再構築と解釈の拡張を実現するという点で斬新なアイデアとチャレンジ性を有している。

3. 研究の方法

(1) 2012年度は、量子集合論の基礎理論を確立するための研究を行った。とりわけ、量子力学の様相解釈における極大存在可能量部分環と量子集合論における部分普遍類との関係を研究した。

(2)2013年度は、主に量子力学の実在論的解釈および観測問題への応用に関する研究を行った。

(3) これらの計画の実現のために、国内の関連領域の研究者をセミナーに招き、研究発表および討論に参加してもらった。関連分野の研究会・学会に広く参加するとともに、それらの分野の研究者とも緊密な研究連絡・共同研究をした。関係する分野の国際会議に参加して研究発表をし、また、国外の関連分野の研究者を訪問または招聘して、共同研究を行

った。とりわけ、当該分野における内外の著名な研究者20数名を招聘して2013年2月18-22日にThe Fourth Nagoya Winter Workshop on Quantum Information, Measurement, and Foundations を2014年3月3-7日にThe Fifth Nagoya Winter Workshop on Quantum Information, Measurement, and Foundations を開催した。また、国内の若手研究者を招いて2014年3月19-20日に第9回科学基礎論春のセミナーを開催した。

4. 研究成果

(1) 量子集合論と量子力学の様相解釈との関係について次の成果を得た。有界観測可能量の全体が任意のフォン・ノイマン環 M で表現される一般的な代数的量子論における有界とは限らない観測可能量の集合 S と M の状態 W について、以下の3条件が同値であることを証明した。

状態 W の一つの存在可能量部分環に観測可能量の集合 S の任意の元がアフィリエイトする。

フォン・ノイマン環 M の射影束 Q を論理とする量子集合論において S に属する量子実数を定項とする非有界量化記号を含む ZFC の定理が状態 W で成立する。

S に属する任意の有限個の観測可能量の状態 W における結合確率分布が存在する。

(2) これにより、隠れた変数の存在を「定項の集合が ZFC 集合論の任意の定理を満たす」という論理的な条件で特徴付けるという定理を完全に一般的な形で証明することができた。

(3) 量子集合論に基づく量子測定理論の展開について次の成果を得た。与えられた状態 W で測定過程 M がある量子物理量 A の測定である条件を量子集合論に基づく量子物理量の相等関係から導いた。すなわち、次の3条件が同値であることを証明した。

被測定量と装置の合成系の初期状態において、測定前の被測定量の値と測定後のメーターの値が合成系の量子論理に基づく量子集合論において一致する。

被測定系と装置の合成系の初期状態において、測定前の被測定量と測定後のメーターが量子完全相関を持つ。

測定の初期状態において、測定前の被測定量と測定装置の POVM が量子完全相関を持つ。

(4) これによって、合成系の量子論理に基づく量子集合論によって定められた測定の成立条件が装置系の記述と独立に測定の POVM だけで決まることが明らかになった。

(5) 従来、様相解釈に基づく量子力学の非崩壊解釈では、フォン・ノイマン型の測定過程を扱い、一般の測定過程を含んでいなかった。フォン・ノイマン型の測定過程では、被測定系と測定装置系の合成系の状態において最大エンタングルメント状態が生成されることに基づいて、測定後のメーター物理量から生成さ

れる極大存在可能量代数に測定後の被測定物理量が含まれることが示され、このことから、測定過程は、被測定物理量がメータ物理量の測定の流れにおいて実在の要素となる過程であると説明されてきた。しかしこの解釈には次の2つの問題点があった。第1点は、この解釈では、測定後のメータ物理量が被測定物理量の測定前の値を示すという解釈ができないことであり、第2点は、この説明の適用範囲がフォン・ノイマン型の測定過程に制限されていたことである。これらの問題を解決するため、以下の成果を得た。

測定後のメータ物理量が被測定物理量の測定前の値を示す条件を明らかにするため、量子集合論で定義される量子集合の相当関係を利用して、所与の状態における物理量の値の同一性を定義し、一方の物理量を含む極大存在可能量代数に他方が必ず含まれることを証明した。

物理量の測定概念を対応する POVM がその物理量のスペクトル分解に一致する一般化測定の場合に一般化して、それらの測定では、任意の初期状態において、測定前の被測定物理量の値と測定後のメータ物理量の値が一致することを証明した。

(6) これらの成果から、測定後のメータ物理量から生成される極大存在可能量代数に被測定物理量が含まれることが示された。このことから、物理量の測定では、測定前の被測定量の値と測定後のメータ物理量の値が共に実在の要素であり、かつ、それらの値が一致することが示された。これによって、被測定物理量が測定値を実在の要素としてもつことを状態崩壊仮説なしに示す新しい非崩壊解釈が構築された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

M. Dall'Arno, F. Buscemi, M. Ozawa, Tight bounds on accessible information and informational power, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 47, 235302/1-235302/12 (2014) (査読有) DOI:10.1088/1751-8113/47/23/235302

M. Ozawa, Heisenberg's uncertainty relation: Violation and reformulation, Journal of Physics: Conference Series 504, 012024/1-012024/12 (2014) (査読有) DOI:10.1088/1742-6596/504/1/012024

小澤 正直, 量子測定の数理と不確定性原理(12): 量子集合論, 数学セミナー 53(3), 48-53 (2014) (査読無)

小澤 正直, 量子測定の数理と不確定性原理(11): 量子論理から量子集合論へ, 数学セミナー 53(2), 56-61 (2014) (査読無)

小澤 正直, 量子測定の数理と不確定性原

理(10): 不確定性原理と相補性原理, 数学セミナー 53(1), 50-55 (2014) (査読無)

小澤 正直, 現代からみた「光子の裁判」と測定の問題: 最新量子測定問題, 数理学 52(1), 16-21 (2014) (査読無)

小澤 正直, フォン・ノイマンと量子力学の数学的基礎, 現代思想 41(10), 154-180 (2013) (査読無)

小澤 正直, 量子測定の数理と不確定性原理(4): 不確定性原理と同時測定可能性, 数学セミナー 52(4), 50-55 (2013) (査読無)

[学会発表](計5件)

小澤 正直, Maximal beable subuniverse of quantum set theory, 2014年日本数学会年会, 2014.3.16, 学習院大学(東京)

M. Ozawa, Uncertainty Principle and Quantum Reality, Colloquium, Centre for Quantum Technologies, 2013.11.28, National University of Singapore (Singapore) (招待講演)

M. Ozawa, Epistemological and Ontological Foundations of Quantum Mechanics, 2nd International Symposium about Quantum Mechanics based on a Deeper Level Theory, Opening Event: The Future of Quantum, 2013.10.3, Vienna (Austria) (基調講演)

小澤 正直, 忠実な測定の原理について, 第8回科学基礎論春のセミナー, 2013.3.5, 名古屋大学(愛知)

小澤 正直, 不確定性原理から量子集合論を考え直す, 2012年度超準解析シンポジウム, 2012.12.7, 日本医科大学(東京) (招待講演)

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.cm.is.nagoya-u.ac.jp/~ozawa/>

<http://researchmap.jp/ozawa/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小澤 正直 (OZAWA, Masanao)

名古屋大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号: 40126313