

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 1 日現在

機関番号：32619

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2012～2014

課題番号：24654026

研究課題名(和文)ベクトル値発展方程式に対する幾何構造保存型差分法

研究課題名(英文)Geometric structure-preserving finite difference method for vector-valued evolution equation

研究代表者

石渡 哲哉 (Ishiwata, Tetsuya)

芝浦工業大学・システム工学部・准教授

研究者番号：50334917

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：工学的によく現れるタイプのベクトル値偏微分方程式に対する有効な数値計算方法を提案し、その計算スキームに対する理論解析を行った。

対象とした問題は、Landau-Lifshitz方程式、Ericksen-Leslie equation、局所誘導モデル(Localized Induction model)などであり、それぞれのモデルの解が満たすべき幾何学的な特性やエネルギー構造など離散化においても継承する数値計算スキームを構築し、離散解の一意存在条件や誤差解析を行った。また、厳密解が構成可能な問題については、厳密解と数値計算の解の比較を行い、本提案の計算手法の有効性を示した。

研究成果の概要(英文)：We propose effective numerical schemes for vector-valued partial differential equations in engineering fields and give some theoretical analyses to

these schemes. The target problem are the Landau-Lifshitz equation, Ericksen-Leslie equation, Localized Induction model and so on. We construct structure-preserving schemes for these models, that is, the proposed schemes inherit a geometric property and energy structure from the original problems and show the existence and uniqueness of the finite difference solutions and also error estimates. For the problem which exact solutions are known or constructible, we compare the numerical solutions with the exact solutions and show the effectiveness of our proposed schemes.

研究分野：応用数学

キーワード：数値解析 差分法 構造保存 ベクトル値関数 非線形偏微分方程式 幾何学的構造

1. 研究開始当初の背景

非線形発展方程式の数値解法で従来より重要視されている観点には、「計算スピード」「計算精度」があり、それぞれ数値解法の理論が発展してきている。一方、例えばハミルトン系に対するシンプレクティック法のように、方程式のもつ性質・構造を離散化においても保持する「構造保存型数値解法」の有用性は広く認識されてきている。分担者の降旗は、ある種の非線形偏微分方程式に対して、変分構造を離散化においても保持する「離散変分導関数法」を提案し、幅広いクラスの偏微分方程式に対する構造保存型数値解法の理論展開を行った。特に、Cahn-Hilliard 方程式などのように、従来の数値計算法では長時間計算が困難であった問題に対しても、この方法により導出された数値計算スキームでは安定に長時間計算が可能になるなど、この方法論の有用性を示してきた。

一方、磁性体中の電子スピンを記述する Landau-Lifshitz 方程式などのように、工学的に重要である数理モデルの中には、ベクトル値関数で記述される解が球面などの多様体に制限されている問題がある。しかし、離散変分導関数法においては、そのような幾何的制約に関する構造の継承は考えられていない。研究代表者は本研究課題に先行する研究において、ベクトル値関数が球面上へ制限されるという幾何構造を継承する差分スキームを提案した。スキーム導出の際、離散変分導関数法は使用していないものの、提案した差分スキームはエネルギー構造も継承していることが示された。これは、幾何構造と変分構造の両方を同時に継承する数値解法の構築が可能であることを示している。

2. 研究の目的

上記の研究の背景にあるように、本研究ではこれまで構造保存型数値計算法の系統的解析の対象としてあまり取り上げられてこなかった、幾何構造を伴うより広いベクトル値非線形発展方程式に対し、その幾何構造と変分構造の両者を同時に継承する差分法の構築を第1の目的とする。ここでは、工学分野に現れる代表的なベクトル値非線形モデルに対して数値計算を行い、有用性を示す。更に、離散変分導関数法などに代表されるような系統的な数値計算スキーム導出法についての考察を行う。

3. 研究の方法

幾何構造と変分構造を同時に継承する差分法を構築するため、本研究課題では、研究代表者が幾何構造保存の見地から、分担者の降旗が変分構造保存の見地から研究を進める。それぞれの方法においては、差分スキームの構成方法に自由度があることが見込ま

れるため、その自由度を明らかにし、これを利用して両構造を同時に保存する差分スキームを構成するための理論的に整合性のとれた枠組みを構築する。そのために、それぞれの研究の進展をお互いにフィードバックしながら、相互の研究を進めこれを融合する。また、多様体上に値が制限されているベクトル値関数の発展方程式で記述される典型的な数理モデルに対して、提案した差分スキームによる数値シミュレーションを行ない、有効性を示すと共に、差分スキームの理論解析へのフィードバックを行なう。

4. 研究成果

対象とした数理モデルごとに記す：

・ Landau-Lifshitz 方程式に対する研究

この方程式は、強磁性体中の電子スピンの運動を記述するモデルであり、解は単位球面上に値を持つベクトル値関数となり、また、外部磁場が無い場合はエネルギー散逸系となることが知られている。本研究に先立つ研究により、これらの構造を継承する差分スキームの開発はできていたが、更にその解析を進め、有限回の反復打ち切りにおいても幾何構造を保存する反復法を開発し、それに対する誤差評価を得た。また、外部磁場が入った場合には、ある種のエネルギー等式が成立することが分かるが、これの離散版のエネルギー等式を満たす構造保存型差分スキームを開発し、その理論解析および数値実験による有効性の確認を行った。

・ 渦系の局所誘導モデルに対する研究

3次元流体中の渦系の運動に対する局所誘導近似により得られる数理モデル(Localized Induction Equation: LIE)に対する構造保存差分スキームを開発し、その理論解析を行った。このモデルの解ベクトルの接ベクトルは長さ保存構造を持ち、かつ、エネルギー保存系になることが知られている。本研究では、この接ベクトルに対する構造保存型差分スキームを開発し、差分解の一意存在定理等の理論解析を行った。更に、このモデルに軸対称流を仮定してより高次まで導出した発展版の数理モデルに対する構造保存差分スキームを開発した。これについては、現在論文文化を行っている。

・ Ericksen-Leslie モデルに対する研究

このモデルは、液晶中の配向ベクトルの運動を記述するモデルであり、液晶分子を取り囲む流体の方程式(Navier-Stokes 方程式)と液晶分子の向きの運動を記述する方程式の連成モデルであり、上記2つの研究と異なり単独方程式でない。この数理モデルに対して、幾何構造、エネルギー構造、非圧縮性の3つを満たす構造保存型差分スキームを開発し、その理論解析と数値計算による有効性の確

認を行った。

以上の研究を通し、少なくとも単位球に値を持つタイプの幾何学的制限については、これを実現する構造保存型差分スキームの導出が可能となった。エネルギー構造を継承する構造保存型差分スキームの導出法との融合については、研究期間中に達成が出来なかったが、これは今後の課題としたい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

1. A. Fuwa, T. Ishiwata and M. Tsutsumi, FINITE DIFFERENCE SCHEME FOR THE LANDAU-LIFSHITZ EQUATION, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 査読有, 29, 2012, 83-110. DOI: 10.1007/s13160-011-0054-9

2. T. Ishiwata and K. Kumazaki, Structure-preserving finite difference scheme for vortex filament motion, Proceedings of ALGORITMY 2012, 査読有, 2012, 230-238. <http://www.iam.fmph.uniba.sk/algoritmy2012/>

3. Takayasu Matsuo, and Daisuke Furihata, A stabilization of multistep linearly implicit schemes for dissipative systems, J. Comput. Appl. Math., 264, 38-48, 2014, 査読有り. DOI: 10.1016/j.cam.2013.12.028

4. T. Ishiwata and K. Kumazaki, Structure preserving finite difference scheme for the Landau-Lifshitz equation with applied magnetic field, 査読有, to appear in AIMS Proceedings.

5. Takayasu Matsuo, and Daisuke Furihata, A stabilization of multistep linearly implicit schemes for dissipative systems, J. Comput. Appl. Math., vol. 264, 2014, pp. 38-48, 査読有, DOI: 10.1016/j.cam.2013.12.028

6. 降籬 大介, 松尾 宇泰, 離散変分導関数法 -- 偏微分方程式の構造保存解法 --, 日本数学会「数学」, Vol. 66, No. 2, 2014年4月, 春季号, pp. 135--156, 査読有. (webでの公開は現在 Vol. 63 までのため URL 存在せず)

[学会発表](計30件)

T. Ishiwata, Structure-preserving finite difference scheme for vortex filament

motion, ALGORITMY 2012, 2012年09月10日 ~ 2012年09月10日, Vysoke Tatry, Podbanske, Slovakia

T. Ishiwata, Structure-preserving finite difference scheme for the Landau-Lifshitz equation, Swiss-Japanese Seminar, 2012年12月17日~2012年12月19日, Zurich university, Zurich, Swiss.

T. Ishiwata, Structure-preserving finite difference scheme for the Landau-Lifshitz equation, One-day Seminar on Applied Mathematics, 2013年03月28日, Tamkang University, Tamsui, Taiwan.

石渡哲哉, Landau-Lifshitz 方程式に対する構造保存型差分法について, 東京理科大学理工学部 数学科 談話会, 2012年06月06日, 東京理科大学野田キャンパス, 野田, 千葉県.

石渡哲哉, あるベクトル値偏微分方程式に対する構造保存型差分法, 応用数学セミナー, 2012年11月01日, 東北大学, 仙台市, 宮城県.

D. Furihata and T. Matsuo, Weakly nonlinear structure preserving schemes for strongly nonlinear partial differential equations, International Congress on Computational and Applied Mathematics, 2012.07.10, Gent, Belgium

T. Matsuo and D. Furihata, A note on the stabilization of multistep linearly-implicit schemes for dissipative systems, International Congress on Computational and Applied Mathematics, 2012.07.10, Gent, Belgium

D. Furihata, A new technique to design numerical schemes with weak nonlinearity based on discrete variational derivative method, International conference of numerical analysis and applied mathematics, 2012.09.20, Kos, Greece.

降籬 大介, 問題の非線形性を弱める離散変分スキームの構成, 日本応用数理学会 2012年度年会, 2012.08.29, 稚内, 北海道.

D. Furihata, Design to construct weakly nonlinear schemes in structure preserving context, 2013 Tokyo Workshop on Structure-Preserving Methods, 2013.01.08, Tokyo, Japan.

T. Ishiwata, Structure-preserving finite difference scheme for the Landau-Lifshitz equation, ESIAM 2013, 2013.6.18, The Newton Hotel, Bandung, Indonesia.

Tetsuya Ishiwata, Structure-preserving finite difference scheme for some sphere-valued partial differential equations, The 38th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, Hokkaido University, 2013.8.21, Sapporo-shi, Hokkaido.

Tetsuya Ishiwata, Structure-preserving finite difference scheme for Heisenberg equation and its application to a vortex filament motion, (Poster), Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2013 (CJS2013), Sep. 6, 2013, Meiji University, Tokyo, Japan.

Daisuke Furihata, An attempt to design a fast and structure preserving scheme for the Feng equation, The Third International Conference: Nonlinear Waves -Theory and Applications, 2013 June 12--15, Beijing, China.

降籟 大介, 離散変分導関数法およびその線形化と, その解析にあらわれる離散的な関数不等式について, 愛媛大学解析セミナー, 2013 June 21-22, 愛媛大学, 愛媛市, 愛媛県.

Daisuke Furihata, An attempt to create fast numerical schemes with the discrete variational derivative method, Equadiff13, 2013 Aug. 26--30, Prague, Czech.

Daisuke Furihata, An iteration method for the numerical solution of the discrete variational derivative schemes, Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2013, 2013 Sep. 5--8, Meiji university, Nakano-ku, Tokyo.

降籟 大介, 弱非線形離散変分導関数スキームについて, 日本応用数学会 2013 年度年会, 2013 Sep. 9-11, 福岡市, 福岡県.

Daisuke Furihata, Predictor corrector algorithm with the discrete variational derivative method, International Conference on Scientific Computation and Differential Equations, 2013 Sep. 16--20, Valladolid, Spain.

降籟 大介, ボロノイメッシュ --有限体積

法に適した空間離散化法--, 東京大学数値解析セミナー(UTNAS), 2013 Nov. 26, 東京大学, 東京都.

降籟 大介, 構造保存数値解法入門 --離散変分導関数法--, 応用数学勉強会, 2013 Dec 17, 芝浦工業大学, さいたま市, 埼玉県.

降籟 大介, 非対称分解に基づく離散変分導関数法の緩和, 北海道大学 MMC セミナー, 2014 Jan. 17, 北海道大学電子研, 札幌市, 北海道.

降籟 大介, 非線形偏微分方程式に対する構造保存解法の高速度の試み, 常微分方程式の数値解法とその周辺 2014, 2014 Mar. 5, 静岡理科大学, 静岡県袋井市.

T. Ishiwata, Structure-preserving finite difference scheme for the Landau-Lifshitz equation, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Special Session 91 Variational methods for evolution equations, Universidad Autonoma de Madrid, Madrid, Spain, July 07, 2014.

Daisuke Furihata, Fast computation for nonlinear PDEs via a predictor-corrector iteration based on a structure preserving method, Numerical Analysis for Partial Differential Equations, 2014年6月20日, 東北大学, 仙台市, 宮城県.

Daisuke Furihata, A predictor corrector iteration method based on the discrete variational derivative method, Kyoto Conference on Numerical Analysis and Differential Equations, 2014年9月19日, Kyoto University, 京都市, 京都府.

降籟 大介, 微分方程式に対する構造保存解法の高速度について -より良い解をより高速に求めるには-, RIMS 研究集会 新時代の科学技術を牽引する数値解析学, 2014年10月8日, 京都大学, 京都市, 京都府.

降籟 大介, 離散変分導関数法入門 -意外に難しくない、微分方程式の構造数値解-, 第6回若手による流体セミナー, 2014年10月25日, 神戸大学, 神戸市兵庫区.

Daisuke Furihata, Discrete variational derivative method: A structure-preserving method for partial differential equations, The fifth workshop on computer-assisted science, 2015年1月30日, Osaka Univ., 大阪市, 大阪府.

降旗 大介, 離散変分導関数法入門 - 偏微分方程式の構造保存数値解法 -, 第 28 回計算数理工学 forum, 2015 年 3 月 20 日, 京都大学, 京都市, 京都府.

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石渡 哲哉 (ISHIWATA, Tetsuya)
芝浦工業大学・システム理工学部・准教授
研究者番号：5 0 3 3 4 9 1 7

(2) 研究分担者

降旗 大介 (FURIHATA, Daisuke)
大阪大学・サイバーメティアセンター・准教授
研究者番号：8 0 2 4 2 0 1 4

(3) 連携研究者

()

研究者番号：