

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 17 日現在

機関番号：32689

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2012～2014

課題番号：24654028

研究課題名(和文) 超離散化手法によるデジタル - アナログ - ハイブリッド数理モデルの構築

研究課題名(英文) Construction of digital-analogue-hybrid mathematical model by ultradiscretization method

研究代表者

高橋 大輔 (TAKAHASHI, Daisuke)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：50188025

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：離散度合いの異なる非線形に対する共通の数学的解析手法を提案することを目指した。具体的な成果としては、(1)初等的セルオートマトンの時間発展方程式を束演算によって表現し、その初期値問題を解くことによって厳密な一般解を提出した。(2)多近傍セルオートマトンで表される粒子系に対して初期値問題を厳密に解いた。また、高次保存量を有する系を1次保存量を有する系に還元して解析を行った。(3)(2)で得られたいくつかの系に対して保存量を壊さずに確率変数を導入し、基本図の理論式を厳密に導出した。

研究成果の概要(英文)：Our purpose is to propose a common analyzing method among nonlinear systems with different levels of discretization. We obtained the following concrete results. (1) We expressed the time-evolution equations of elementary cellular automata using lattice operations. We proposed the exact general solutions solving their initial value problem. (2) We solved exactly the initial value problems for the particle systems expressed by cellular automata with multi-neighbors. Moreover, we analyzed the cellular automata with higher-order conserved quantity reducing them to those with first-order. (3) We introduced the stochastic parameters to the systems obtained in (2) preserving their conserved quantity and derived the exact theoretical expression for their fundamental diagram.

研究分野：離散可積分系

キーワード：可積分系 セルオートマトン ソリトン 超離散化 保存量 非線形波動 差分方程式

1. 研究開始当初の背景

近年、可積分系分野において、微分・差分・超離散という離散度合いの異なる方程式が、連続極限・超離散極限を介して解のレベルまで直接的に結びついていることが、申請者を含む研究グループにより明らかになった。特に超離散方程式はセルオートマトンのようなデジタル系の記述も可能であり、あらゆる離散度合いの方程式を共通に取り扱うことを可能にした。その基本的な成果は以下の文献にまとめられている。

・「差分と超離散」広田良吾・高橋大輔(共立出版、2003年)

その後この研究はパウルベ方程式・量子可積分系・トロピカル幾何学などさまざまな分野へ大きく発展し、交通流・数値計算法・カオス系などへの応用も見いだされた。それら成果の一部は以下の文献にまとめられている。

・「開かれた数学3 箱玉系の数理」時弘哲治(朝倉書店、2010年)

しかしながら、神経パルスのデジタル処理や多粒子の流動現象など、離散度合いの異なる数学的記述を同時に取り扱うような手法やモデルの提案には未だなされていないのが現状である。

2. 研究の目的

デジタルとアナログの中間的な対象に対して、従来は局所平均による連続化や確率による平均場の手法がとられてきた。しかしながら、対象のデジタル部分とアナログ部分がともに重要な役割を果たすとき、このような手法には限界がある。本研究では、微分方程式やセルオートマトンなど、異なる離散度合いの数学表現を融合する表現の開発を目指しており、対象をよりいっそう精密に再現することを可能とする。また、それによって無限小解析学と情報数学のような異分野間の架け橋となる数学表現を可能にし、従来の理論を大きく発展させることが予想される。

さらに、上に述べたような現象に対するハイブリッド型の数理モデルが実現すれば、今までは再現自体に限界があり、その再現手法に主眼が置かれていたそれら現象の強力なシミュレーションが実現することとなる。これにより現象それぞれが関わる生命系・物理系・情報系分野の飛躍的発展が可能となり、次世代に通用する理論・応用が拓かれると予想される。

具体的には、本研究ではセルオートマトン

と呼ばれる完全離散系に対する初期値問題を、方程式の立場から厳密に解くことを目指す。また特に移動ルールに従う多粒子系のダイナミクスに焦点を絞り、そのデジタル表現に対する連続数学の手法を用いた解析を行うことを目指す。

3. 研究の方法

(1) 時間1階3近傍2値のセルオートマトン、いわゆる初等的セルオートマトンに対して、256個のルールの初期値問題をすべて対象とし、解が多項式オーダーの複雑度を有するもの、いわゆる可解なセルオートマトンを探索する。また、解の表現を束(lattice)の演算で表し、実際の初期値問題をmax-min-plus代数の観点から解析する。

(2) 時間1階3~5近傍2値のセルオートマトンに対して、1次保存量を有するものを全探索し、その系を粒子が移動する多粒子系とみなすことによって、ダイナミクスを解析する。この際に時間発展則はすべてmax-plusあるいはmax-min-plus表現によって表す。また部分的には初期値問題を解き、任意の初期値に対して、どのような定常解が得られるかを解析する。さらに、時間無限大の漸近挙動を調べ、基本図の構造を調べる。

(3) (2)で得られた粒子系のmax(-min)-plus表現に対して、確率変数を導入し、同じく1次保存量を有する確率粒子系を導出する。この確率粒子系の時間無限大の漸近挙動を調べ、基本図の理論式を導出するための手法を開発し、実際に導出を行う。

4. 研究成果

(1) 初等的セルオートマトンについては、256個のうち独立な時間発展則が75個あることがわかっている。これらについて、数式処理ソフト Mathematica を使用して初期値からの時間発展を実際に調べ、そのうち約1/3の24個のルールについては束演算による表現と多項式オーダーの複雑度を持った厳密解が存在することが判明した。たとえばルール番号140のECAは束演算によって

$$u_j^{n+1} = (\overline{u_{j-1}^n} \vee u_{j+1}^n) \wedge u_j^n$$

と表されるが、厳密解は2次の多項式オーダーの複雑度を有する解として次のように表される。

$$\begin{aligned}
u_j^n &= (\overline{u_{j-1}^0} \vee \overline{u_j^0} \vee \dots \vee \overline{u_{j+n-3}^0} \vee \overline{u_{j+n-2}^0} \vee u_{j+n}^0) \\
&\wedge (\overline{u_{j-1}^0} \vee \overline{u_j^0} \vee \dots \vee \overline{u_{j+n-3}^0} \vee u_{j+n-1}^0) \\
&\dots, \\
&\wedge (\overline{u_{j-1}^0} \vee \overline{u_j^0} \vee u_{j+2}^0) \\
&\wedge (\overline{u_{j-1}^0} \vee u_{j+1}^0) \wedge u_j^0.
\end{aligned}$$

いったんこのような解が得られると、初期値は 0, 1 の 2 値に限定する必要がなく、実数の初期値問題を同時に解いたことになる。そのような解の例を次に示す。

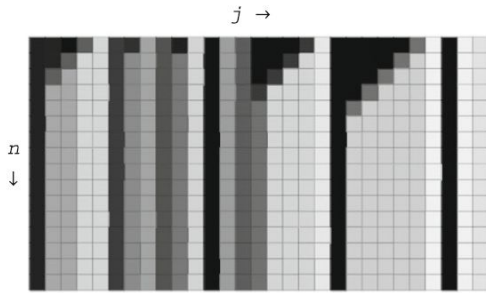


図 1

この例のように、2 値のセルオートマトンの時間発展ルールを含み、かつ、解が厳密に提出できるような実数の方程式と解のセットが与えられたことは、非常に重要な成果である。

(2) 3~5 近傍の 2 値セルオートマトンで 1 次保存量を有する独立なものは 3 近傍で 1 つ、4 近傍で 4 つ、5 近傍で 115 個あることがわかっていて、これらに対して、まず数値シミュレーションから初期値問題を解き、粒子がどのように振る舞うかについて解析を行った。さらに、3, 4 近傍のものはすべて、5 近傍のものについてはいくつかのルールについて方程式表現および厳密解を得た。

また、時間無限大の漸近挙動から得られる基本図について、その分枝の構造について方程式の仕組みとの関連性を調べ、なぜそのような分枝が生じるかについて理論的に考察を行った。

次に 1 次保存量だけでなく、高次保存量にも着目し、高次保存量を有する系がコール・ホップ変換型の変数変換により 1 次保存量に帰着する場合があることを解明した。たとえば図 2 は 2 次の保存量を有するルール番号 54612 の 4 近傍セルオートマトンの時間発展の例であるが、XOR 演算を用いた変数変換により、1 次の保存量を有するルール番号 43944 の 4 近傍セルオートマトンに帰着する(図 3)。

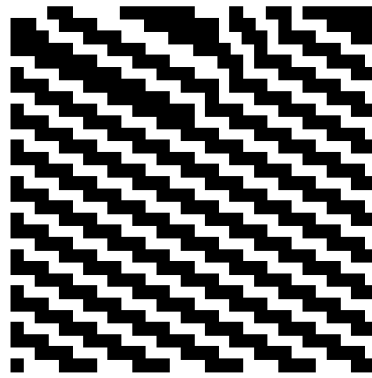


図 2

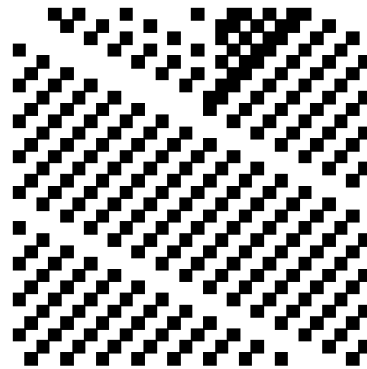


図 3

以上の成果は可解なセルオートマトンの枠組みを大きく拡張するものであり、デジタルの時間発展系に対する知見として貴重なものとなっている。

(3) 1 次保存量を有する 4 近傍セルオートマトン 4 種類のうち 3 つについては厳密な理論曲線を有する基本図が存在するように確率変数を導入することが可能であった。また、我々が分解公式と呼ぶ仮定的な公式、および、確率系の定常状態に関する遷移バランス方程式の両者を用いれば基本図の理論式を導

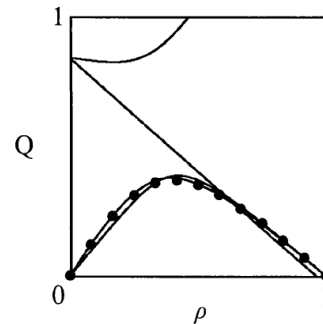


図 4

出できるという一般的な手法の開発に成功した。図 4 にそのような基本図の例を示す。

この成果は非対称単純排他過程など従来の理論手法に比べて、仮定を要するとはいえ

非常に強力かつ汎用な手法であり、確率系に対する理論手法の新しいステージを導くものである。

さらに、(2)の成果で得られた高次保存量を有する系に対しても、同様の手法で基本図の理論曲線を導出することに一部成功した。この際に、解のパターンの連続する1の領域の左端と右端の位置についての、オイラー-ラグランジュ形式による時間発展を導き、それらに対して上記の分解公式および遷移バランス方程式を用いることにより、従来知られていない新規の成果を導出することができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

(査読有) T. Ikegami, D. Takahashi, J. Matsukidaira, On solutions to evolution equations defined by lattice operators, Japan J. Indust. Appl. Math. 31 (2014) 211-230

(査読有) T. Okumura, J. Matsukidaira, D. Takahashi, Max-min-plus expressions for one-dimensional particle cellular automata obtained from a fundamental diagram, J. Phys. A: Mathematical and Theoretical 46 (2013) 295101 (15pp)

(査読有) 桑原英樹, 池上貴俊, 高橋大輔, 確率変数を含む粒子セルオートマトンについて, 日本応用数理学会論文誌 vol.23 (2013) pp.1-13

(査読有) 高橋大輔, 共生する連続と離散, 応用数理 vol.23 (2013) pp.35-38

(査読有) 高橋大輔, 桑原英樹, 池上貴俊, 松木平淳太, 粒子セルオートマトンの非自励化および確率化について, RIMS 講究録別冊 B41(2013)147-160

[学会発表](計18件)

高橋大輔, 可解なセルオートマトンの探索, 「セルオートマトンが拓く現象数学」(明治大学現象数理学会研究拠点主催研究会, 2014年12月4日, 5日)

高橋大輔, 松木平淳太, 高次保存量を持つセルオートマトンについて, 平成26年度九州大学応用力学研究所共同利用研究集会「非線形波動研究の現状 - 課題と展望を探る -」(2014.10.30~11.1, 九州大学応用力学研究所)

津川未希, 松木平淳太, 高橋大輔, Max-Min-Plus 表現を用いた5近傍粒子CAの確率化について, 平成26年度九州大学応用力学研究所共同利用研究集会「非線形波動研究の現状 - 課題と展望を探る -」(2014.10.30~11.1, 九州大学応用力学研究所)

松木平淳太, 高橋大輔, 高次保存量をもつCAのMax-Min-Plus解析について, 日本応用数理学会2014年度年会(2014.9.3~9.5, 政策研究大学院大学)

延東和茂, 高橋大輔, 松木平淳太, 高次保存量をもつCAの確率化について, 日本応用数理学会2014年度年会(2014.9.3~9.5, 政策研究大学院大学)

D. Takahashi, On exact solutions to lattice equations, SIAM Conference on Nonlinear Waves and Coherent Structures (2014.8.11-14, Churchill College, University of Cambridge)

J. Matsukidaira, D. Takahashi, Max-min-plus expressions for one-dimensional cellular automata with second order conserved quantity, 20th International Workshop on Cellular Automata and Discrete Complex Systems will take place in Himeji, Japan, on July 7th-9th, 2014.

D. Takahashi, Initial value problem of lattice equations, 国際会議「China-Japan Joint Workshop on Integrable Systems 2013」(京都大学, 2013.3.16-19)

池上貴俊, 桑原英樹, 高橋大輔, 粒子CAの拡張について, 日本応用数理学会2012年度年会(稚内全日空ホテル, 2012.8.28~9.2)

6. 研究組織

(1)研究代表者

高橋 大輔 (TAKAHASHI, Daisuke)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号: 50188025

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし