1版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ４ 月 ２７ 日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2012～2014
課題番号：２４６５４０３４
研究課題名（和文）分散方程式系の漸近解析

研究課題名（英文）Asymptotic analysis for systems of dispersive equations

研究代表者
林　仲夫（Hayashi, Nakao）

大阪大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：３０１７３０１６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,500,000円

研究成果の概要（和文）：２次の非線形項を持った非線形シュレディンガー方程式系及び非線形クラインーゴルドン方程式系を含む非線形分散型方程式系の研究を２次元空間で行なった．非線形シュレディンガー方程式系に対しては修正波動作用素の存在を質量共鳴条件のもと示した．また波動作用素の非存在を解の下からの時間減衰評価を利用して明らかにした．非線形クラインーゴルドン方程式系に対しては初期値がエネルギークラスに近い空間にあるときを考察し，散乱状態の存在を質量非共鳴条件のもと示した．

研究成果の概要（英文）：We considered systems of nonlinear dispersive equations including nonlinear Schoedinger systems and nonlinear Klein-Gordon systems with quadratic interactions in two space dimensions. We showed the existence of modified wave operators for nonlinear Schroedinger systems under the mass resonance condition and non existence of wave operator by using a sharp time decay estimate of solutions to linear problem from below. For nonlinear Klein-Gordon systems, the initial value problem was considered when the initial data are in the class which is close to the energy one and the existence of scattering states was established under some mass non resonance conditions.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：分散型波動方程式系　漸近的振舞い　臨界べき非線形項　修正波動作用素　Schroedinger方程式系　Klein-Gordon方程式系

１．研究開始当初の背景

（１）臨界冪非線形シュレデインガー方程式の解の漸近的振る舞い，及び散乱問題の研究は小澤[1]にはじまる．この研究は研究代表者と海外共同研究者 Naumkin [2],[4]によって発展させられた．連立系方程式は物理的重要性にもかかわらず，ほとんど手が付けられていない状態である．単独方程式の成果を連立系に応用することを考える．

（２）臨界冪非線形クライン・ゴルドン方程式の研究はDelort [3]によってはじめられた．彼は解の有限伝播性、双曲座標系への座標変換，Klainerman[7] のベクトル場法，初期値がコンパクトな台を持つという条件を駆使することによって漸近解は線形のそれと異なることを明らかにした（修正散乱状態の存在）． 研究代表者と海外共同研究者Naumkinは[5]において臨界冪非線形クライン・ゴルドン方程式の初期値問題を，広いクラスの初期値において考察し，解の漸近形を明らかにし修正散乱状態の存在を示すことに成功した．また最終値問題を考え[6]において修正波動作用素の存在を示した．これらの成果を連立系に応用することを考える．

[1] Commun. Math. Phys.,139 (1991), pp. 479-493; [2] Amer. J. Math., 120 (1998), pp. 369-389; [3] Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup., 34 (2001), pp. 1-61; [4] Comm. Math. Phys., 267(2006), pp. 477-492;[5] Zeit. Fur Ang.Math.Phy.,59 (2008), no.6, pp.1002-1028;[6] J.Math.Phys., 50(2009), no. 10, pp.103501-14; [7] Commun. Pure Appl. Math., 38 (1985), pp. 631-641;

２．研究の目的

臨界冪非線形項を持った，単独非線形シュレデインガー方程式及び非線形クライン・ゴルドン方程式の研究は従来盛んにおこなわれてきた．しかし数理物理学の分野で重要な働きをする非線形問題は連立方程式系であること，また非線形項が臨界冪であることが多くみられる．具体的な例としては２次元２次の非線形項をもった臨界冪非線形シュレデインガー方程式系，非線形シュレデインガー方程式系の相対論版である，２次元２次の非線形項をもった臨界冪クライン・ゴルドン方程式系があげられる．

３．研究の方法

研究代表者,海外共同研究者 Li，Naumkin との交流をはかることにより，臨界冪非線形項を持った単独シュレデインガー方程式，クライン・ゴルドン方程式等の非線形分散型方程式の研究をさらに発展させ，共同研究者相互の研究成果を問題に応用し問題の解決を促進させる．連立系の解の振舞いはその方程式の数に応じて複雑さを増すことが予想される．そこで我々は初期値問題ではなく，終値問題を手始めに研究し，方程式系の解を近似解の周りで見つけることを試みる．新しい近似解を見つけることが研究の中心となる．そのために統一的方法を見つけ出す．研究代表者，海外共同研究者の研究論文のなかには多くの共同研究があり，これを継続するため定期的に研究会を開催し，海外交流を行う．

４．研究成果

（１）スケール不変な空間における解の適切性を冪乗型非線形シュレデインガー方程式に対して研究した．スケール不変な空間は次元，非線形項の階数に依存するものであるが臨界冪非線形シュレデインガー方程式に対しては可積分空間がその代表的なもの一つであることが知られている．２乗可積分空間を含まない空間での研究はほとんどない．我々は海外共同研究者の C.Li との共同研究を通してこの問題を考え，ゲージ不変性を満たす臨界冪２次元非線形シュレデインガー方程式に対して部分的な成果を得た．この成果は主な発表論文等〔雑誌論文〕の①において発表されている．我々はこの成果を方程式系に発展させることを今後の研究課題として考えている．

（２）２次の非線形項を持ったシュレデインガー方程式系の研究を行い時間大域解の存在に関する適切性及び時間に関する振る舞いを，質量条件のもと明確にした．空間次元が２次元の場合は解の性質について詳しく調べられていた．しかし高次元の場合は，解の適切性を認める関数空間，あるいは解の爆発条件に関する条件は明確でなかった．我々はこれらの問題に解の時空間評価と単独方程式の研究で用いられた等式を援用することによって成果を得た．この結果は主な発表論文等〔雑誌論文〕の②に掲載されている．

（３）２次の非線形項を持った非線形クラインーゴルドン方程式系の研究を空間次元が２次元の場合に行い，非線形項が共鳴現象を起こさない場合に関して，時間大域解の存在と散乱問題に関する研究を従来より広い関数空間で行なった．この結果を証明するため，非線形変換を用い，さらにその際に現れる双線形形式の評価を精密に行なったことが研究の特色としてあげられる．双線形形式の評価により従来の結果に比べると強い質量条件となっているが，これは今後の研究課題とすべき点である．この結果は主な発表論文等〔雑誌論文〕の③に掲載されている．

（４）ある種の変換を施すと非線形シュレデインガー方程式系となることが知られている微分型非線形シュレデインガー方程式の研究を行い，修正波動作用素の存在を先行結果より広い関数空間で示した．その際，近似解を適切に選択したことが研究の特色として考えられる．この結果は主な発表論文等〔雑誌論文〕の④に掲載されている．

（5）2次元2次の非線形項を持った非線形シュレデインガー方程式系の解の漸近的振る舞いについて研究を行い修正波動作用素の存在及び解の時間減衰評価を求めた．対象とする方程式は線形部分と非線形項が共鳴現象を引き起こすもので臨界冪問題と呼ばれるものである．単独方程式の場合は解の振る舞いが単独常微分方程式により決定されることを示し，この常微分方程式を解くことによって解の漸近的振る舞いが得られる．しかし連立系の場合は常微分方程式系の解の漸近的振る舞いを求めることが困難である．我々は問題とする方程式系の特解をいくつか求めることにより解の振る舞いを明確にした．この結果は主な発表論文等〔雑誌論文〕の⑤に掲載されている．

（6）臨界冪非線形シュレデインガー方程式系の形に書き直すことができる臨界冪非線形分散型波動方程式の解の振る舞いについて研究を行い，線形方程式の近くに非線形問題の解を見つけることができないことを示した．一般に共鳴現象を引き起こす問題は解に非線形項の影響が現れるもので線形の解に漸近しないことが予想されている．従来の研究方法は解の有限伝播性を用いたもので，有限伝播性を持たない分散型波動方程式には応用できない．そこで我々はシュレデインガー方程式の解の性質を精密に調べ，線形解の下からの時間減衰評価を求めることによって困難を克服した．この結果は主な発表論文等〔雑誌論文〕の⑥に掲載されている．

5．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１７　件）

① C. Li and N. Hayashi, Critical nonlinear Schroedinger equations with data in homogeneous weighted L^2 spaces, J. Math. Anal. Appl., **419** (2014), no.2, pp. 1214-1234，査読有り，
Doi : 10.1016/j.jmaa.2014.05.053

② N. Hayashi, T.Ozawa and K.Tanaka, On a system of nonlinear Schroedinger equations with quadratic interaction, Ann. Inst. H. Poincare, **30** (2013), pp. 661-690，査読有り，
DOI : 10.1016/j.anihpc.2012.10.007

③ N. Hayashi and P.I.Naumkin, A system of quadratic nonlinear Klein-Gordon equations in 2d, J. Differential Equations, **254** (2013), pp. 3615-3646，査読有り，
DOI : 10.1016/j.jde.2013.01.035

④ Z. Guo, N. Hayashi, Y. Lin and P. Naumkin and P.I.Naumkin, Modified scattering operator for the derivative nonlinear Schroedinger equation, SIAM J. Math. Aanl., **45** (2013), No. 6, pp. 3854-3871，査読有り，
DOI:10.1137/12089956X

⑤ N. Hayashi , C. Li and P.I.Naumkin, Modified wave operator for a system of nonlinear Schroedinger equations in 2d, Commun. P.D.E., **37**(2012), pp. 947-968，査読有り，
DOI:10.1080/03605302.2012.668256

⑥ N. Hayashi, C. Li and P.I.Naumkin, Nonexistence of asymptotically free solution of systems of nolinear Schroedinger equations, Electron. J. Diff. Equ., **2012**(2012), no. 162, pp. 1-14，査読有り．

〔学会発表〕（計　１８　件）

① N. Hayashi, Asymptotics of solutions to fourth order nonlinear Schroedinger equations, Workshop on Paritial Differetial Equations in Zhejiang University, March 14th-15th, 2015, Zhejiang University, China.

② N. Hayashi, Scattering operator for semirelativistic Hartree type equation with a short range potential，応用解析研究会，早稲田大学，平成26年12月13日(土曜日).

③ N. Hayashi, Large time asymptotics for the reduced Ostrovsky equation, The 1st Paritial Differetial Equations Seminar in Yanji, Sep. 17,2014, Yanbian University, China.

④ N. Hayashi, Large time asymptotics for the reduced Ostrovsky equation, The 9th East Asia Paritial Differetial Equations, July 28(Mon)-31(Thu),2014, Hotel Nikko Nara, Japan.

⑤ N. Hayashi, Nonexistence of the usual scattering states for the generalized Ostrovsky-Hunter equation, 2014 日本数学会年会，学習院大学，平成26年3月16日(日)(3/15-3/18).

⑥ N. Hayashi, Quadratic nonlinear

Klein-Gordon equations in 1d or 2d,
「第 30 回九州における偏微分方程式研究集会」，(平成 25 年 1 月 31 日，会場：福岡大学 2 号館(商学部) 221 教室,平成 25 年 1 月 29 日(火曜日)－平成 25 年 1 月 31 日(木曜日).
⑦ N. Hayashi, Modified scattering operator for the derivative nonlinear Schroedinger equation, International Workshop on PDE "Nonlinear Dispersive Equations and Fluid Mechanics" -Well-posedness and Smoothing Effect-", 東北大学 青葉山キャンパス 数理科学記念館(川井ホール), 2012.12.13, December 11, 2012-December 14, 2012.
⑧ N. Hayashi, 1 次元非線形 Klein-Gordon 方程式解の漸近評価,2012 日本数学会秋季総合分科会, 九州大学, 平成 24 年 9 月 20 日(木曜日)平成 24 年 9 月 18 日(火曜日)-平成 24 年 9 月 21 日(金曜日).
⑨ N. Hayashi, On NLS and NLKG systems, China-Japan Joint Meeting at JanJi (延吉), Janbian University, 延辺大学, September 10, 2012.
⑩ N. Hayashi, A system of quadratic nonlinear Klein-Gordon equations in 2d, 奈良女子大学偏微分方程式研究集会, 平成 24 年 6 月 23 日(土)-6 月 24 日(日), 平成 24 年 6 月 23 日.
⑪ N. Hayashi, Scattering problem for nonlinear Klein-Gordon equations in 2d, RIMS 研究集会「幾何学的偏微分方程式に対する保存則と正則性特異性の研究」, 京都大学数理解析研究所, 平成 24 年 6 月 13 日(水)-6 月 15 日(金), 平成 24 年 6 月 14 日.

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
林　仲夫　　　(HAYASHI NAKAO)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：３０１７３０１６

(2)研究分担者
()
研究者番号：

(3)連携研究者
砂川　秀明　　　(SUNAGAWA HIDEAKI)
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：８０３７５３９４