

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 15 日現在

機関番号：32689

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2012～2015

課題番号：24654035

研究課題名(和文)円周上の微分同相写像群の共役問題の解決

研究課題名(英文)Resolution of conjugation problems on circle diffeomorphism groups

研究代表者

松崎 克彦 (Matsuzaki, Katsuhiko)

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授

研究者番号：80222298

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：(1)ヘルダー連続微分をもつ円周の微分同相写像のタイヒミュラー空間を構成し、その基礎を確立した。(2)メビウス変換群の対称写像による共役の各元がヘルダー連続微分をもつ微分同相写像の場合、共役写像も同じオーダーのヘルダー連続微分をもつことを証明した。(3)オーダーが $1/2$ より大きいヘルダー連続微分をもつ微分同相写像群が、同じオーダーの共役写像によりメビウス変換群の共役となるための必要十分条件を、微分同相写像の擬等角拡張の歪曲係数の一様可積分性より与えた。(4)オーダー $1/2$ より大を仮定しない場合は、歪曲係数の可積分性が一様にある定数より小さいならば十分であることを証明した。

研究成果の概要(英文)：(1) We introduced the Teichmüller space of circle diffeomorphisms with Hölder continuous derivatives and established its foundation. (2) We proved that if a group of Möbius transformations is conjugate to a group of circle diffeomorphisms with Hölder continuous derivatives by a symmetric homeomorphism, then the conjugating map actually has a Hölder continuous derivative of the same order. (3) We obtained a necessary and sufficient condition for a group of circle diffeomorphisms with α -Hölder continuous derivatives for $\alpha > 1/2$ to be conjugate to a group of Möbius transformations by a circle diffeomorphism with an α -Hölder continuous derivative in terms of uniform integrability of the complex dilatations of quasiconformal extensions of the group elements. (4) Even if we do not assume $\alpha > 1/2$, we showed that if the integrability of quasiconformal extensions is uniformly bounded by a certain constant sufficiently small, then the above result still holds true.

研究分野：タイヒミュラー空間論

キーワード：複素解析学 微分幾何学

1. 研究開始当初の背景

(1) 回転数が無理数である円周の自己同相写像は回転と共役であるかという古典的問題に微分可能性を加味することはダンジョワにより提示され、近年では Yoccoz 等により、リュービル数でない無理数回転に対して、かつ、そのときに限り微分同相写像と同じ微分オーダーをもつ共役写像の存在が示されている。問題を円周の自己同相写像群に一般化し、そのメビウス変換群への共役を考えれば、同様な状況が現れる。

(2) 同相写像群がメビウス変換群へ位相共役となるための条件は Tukia, Gabai 等により収束群という位相的性質であることが示され、3次元多様体の幾何化プログラムのあるステップに応用された。しかし、この結果をタイヒミュラー空間論や複素力学系に適用するためには、同相写像群を擬対称性という弱い滑らかさをもつカテゴリーで考える必要があり、共役写像にも同じ滑らかさが要求される。Markovic はこの基本定理を証明したが、方法は擬等角写像を組み合わせた構成する複雑なものであり、汎用的ではなかった。一方、同時期に Navas は微分同相写像群に対する微分共役を証明したが、円周上の不変な射影構造を見つける方法のため、微分可能性には C^3 級の仮定が必要であった。より弱い微分可能性での共役可能性については、微分のオーダーをどのように取り込むかが問題として残っている。

(3) 函数論では擬対称写像の擬等角拡張の理論として Carleson に始まる漸近的等角写像の概念があり、擬等角写像の歪曲率の境界での減衰オーダーと、境界値である擬対称写像の微分オーダーの関係が示されている。漸近的等角写像は近年、Earle-Gardiner-Lakic による漸近的タイヒミュラー空間の理論に使われて見直されているが、ここで有用となると思われるものは Cui による双曲計量に関する 2 乗可積分な歪曲率をもつ擬等角写像の空間である。この空間にはヴェイユ・ピーターソン計量を定義することが可能であり、実際 Takhtajan-Teo はそれが負曲率をもつことを示している。微分同相写像群はこの空間に等長的に作用し、その軌道が有界であるならば固定点をもつことは一般論より知られている。固定点は共役写像に対応する。したがって、微分オーダーを反映するような同種の空間を構成し、それに対してこの原理を適用することが可能ではないかと推測できる。

2. 研究の目的

ポアンカレに始まる円周の自己同相写像の分類は、自己同相写像群のメビウス群への共役可能性問題に一般化され、3次元多様体の幾何化に関連し、位相的な性質により共役条件が特徴づけられた。しかし、同相写像群に滑らかさを課し、その共役写像の滑らかさを問うことは、ダンジョワに端を発し、最近

では擬対称写像群に対しては解答を得たが、微分同相写像群に対する研究手法は確立されていない。本研究では、ある正則微分形式のなすバナッハ空間への微分同相写像群の等長作用を考察し、固定点の存在位置から共役写像の微分オーダーを調べる原理を提唱する。また、バナッハ多様体の凸性や負曲率性等の固定点の存在を保証する性質を導出し、可微分共役問題に統一的な視点を与える。具体的には、 C^{1+} 級写像からなる円周の微分同相写像群が、 C^{1+} 級微分同相写像によりメビウス変換群に共役となるための条件を求めることを目標とする。

3. 研究の方法

(1) 漸近的等角写像の歪曲率の減衰オーダーと境界値である擬対称写像の微分オーダーの関係、および対応する等角写像のシュワルツ微分、対数微分のノルムとの関係を研究した単葉函数論における伝統的な結果を見直すこと。微分同相写像群の微分共役問題に取り組むときの最初の問題点は、微分オーダーの条件をいかに利用するかであり、円周上の力学系の研究だけからではこの時点で手詰まりとなる。等角縫い合わせや擬等角拡張に関する複素平面上の単葉函数論における研究成果を応用し、問題を漸近的等角写像の評価に読み替えることを行う。

(2) 単位円板上の漸近的等角写像に付随する 2 種類の役割の異なる空間 (全体空間と制限空間) を利用すること。全体空間としては、微分同相写像群が等長的に作用し、かつその作用の固定点の存在が保証されるものが必要である。以前の研究において漸近的等角写像全体の空間では固定点の存在が保証できないことを示している。本研究ではまず、全体空間として、単位円板上の p 乗可積分な正則 2 次微分形式からなるバナッハ空間を考える。2 乗可積分な場合はタイヒミュラー空間のペアス埋め込みを通じて Cui, Takhtajan-Teo による ヴェイユ・ピーターソン計量の研究があるが、目標の結果の証明のためにはその一般化 (p 乗ヴェイユ・ピーターソン計量をもつ普遍タイヒミュラー空間) が全体空間として必要となる。しかし、全体空間のみの考察では共役写像の微分オーダーに関する情報は得られない。この問題点を克服するものが制限空間のアイデアであり、上で述べたように微分オーダー (C^{1+} 級) が直接反映する双曲計量の p 乗をゲージとする有界正則 2 次微分形式からなるバナッハ空間を考える。微分同相写像群による軌道がこのバナッハ空間の上に存在することの証明が本研究の解析的側面からの最大の課題であり、函数論の成果を活用する。全体空間における固定点の存在と制限空間上の軌道の分布をあわせて、固定点が制限空間上に位置することが示される。共役写像の微分オーダーが同相写像群の微分オーダーと一致する原理はここに存在する。

(3) 等長変換群が有界軌道をもって作用する空間において、軌道の外心の一意性が保証される条件をさがし、固定点の存在を証明すること。微分幾何においてこの原理は Bruhat-Tits の理論により顕在化している。非正曲率完備なリーマン多様体の概念を測地距離空間に一般化したアダマール空間において、任意の有界集合の外心の一意性は知られている。アダマール空間は非正曲率性のひとつの定式化である CAT (0) 空間を含む広範な対象である。一方、函数解析においては、上記の原理は一樣凸性をもつバナッハ空間において成り立つことが知られている。一樣凸性からは再帰性が従い、共役空間の性質（弱コンパクト性等）が利用できる。上で述べた p 乗可積分な正則 2 次微分形式からなるバナッハ空間とヴェイユ・ピーターソン計量をもつ普遍タイヒミュラー空間は、それぞれ、一樣凸空間とアダマール空間となり、ともに有界軌道をもつ等長変換群には固定点が存在するが、 p 乗ヴェイユ・ピーターソン計量をもつ普遍タイヒミュラー空間に対してもこの性質を拡張することが必要である。

4. 研究成果

ヘルダー連続微分をもつ円周の微分同相写像のタイヒミュラー空間を定義し、それに複素構造を導入した。円周上の擬対称自己同相写像の族を用いて、普遍タイヒミュラー空間の部分空間を定義することに関してはこれまで多くの研究があった。本研究課題では、適切な構造を与えることも含めて上記の写像族に対してタイヒミュラー空間を定義できた。

そのためにまず、ヘルダー連続微分をもつ円周の微分同相写像を擬等角拡張の歪曲係数のノルムで特徴づけること、および、ベアス埋め込みによる正則 2 次微分のノルムで特徴づけることを行った。これらの空間の間には、タイヒミュラー射影、ベアス射影、ベアス埋め込みと呼ばれる写像が存在するが、新たに定義したノルムに関するバナッハ空間の複素構造に関して正則写像となることも証明している。さらにタイヒミュラー射影に関して等角重心写像から構成される切断があるが、微分同相写像のタイヒミュラー空間に制限しても等角重心写像から定義される写像が連続な切断となることが証明できた。

応用として、ヘルダー連続微分をもつ円周の微分同相写像群の各元のヘルダー定数から定まるある指数が一樣に十分小さい正数で押さえられているならば実はメビウス変換群となるという剛性定理を証明した。

本来の研究課題であるヘルダー連続微分をもつ円周の微分同相写像群のメビウス変換群への共役条件を与える問題については、ヘルダー連続性の指数が $1/2$ より大きい場合には、必要十分条件として擬等角拡張の歪曲係数の有界ノルムおよび可積分ノルムの一

様性を与えた。この証明のために、ヘルダー連続微分をもつ微分同相写像群が対称写像によりメビウス変換群に共役ならば、共役写像は実は同じ指数のヘルダー連続微分をもつ微分同相写像でとれることを示した。任意の正のヘルダー指数に対しては、可積分ノルムが十分小さな定数で一樣に押さえられているならば十分であることが証明できた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 13 件)

K. Matsuzaki, Circle diffeomorphisms, rigidity of symmetric conjugation and affine foliation of the universal Teichmüller space, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, Math. Soc. Japan. (出版予定)(査読有)

K. Matsuzaki, The Chabauty and the Thurston topologies on the hyperspace of closed subsets, *J. Math. Soc. Japan*. (出版予定)(査読有)

K. Matsuzaki, Uniform convexity, normal structure and the fixed point property of metric spaces, *Topology Appl.* 196 (2015), part B, 684-695. (査読有) DOI: 10.1016/j.topol.2015.05.039

K. Matsuzaki, The universal Teichmüller space and diffeomorphisms of the circle with Hölder continuous derivatives, *Handbook of group actions*. Vol. I, pp. 333-372, *Adv. Lect. Math. (ALM)*, 31, Int. Press. (査読有)

K. Falk and K. Matsuzaki, The critical exponent, the Hausdorff dimension of the limit set and the convex core entropy of a Kleinian group. *Conform. Geom. Dyn.* 19 (2015), 159-196. (査読有) DOI: 10.1090/ecgd/279

K. Matsuzaki, Infinite-dimensional Teichmüller spaces and modular groups, *Handbook of Teichmüller theory*. Vol. IV, pp. 681-716, *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, 19, Eur. Math. Soc., 2014. (査読有)

K. Matsuzaki, Certain integrability of quasisymmetric automorphisms of the circle, *Comput. Methods Funct. Theory* 14 (2014), 487-503. (査読有) DOI:10.1007/s40315-014-0082-y

K. Matsuzaki, An estimate of the maximal dilatations of quasiconformal automorphisms of annuli, *Complex Var. Elliptic Equ.* 58 (2013), 923-932. (査読有) DOI:10.1080/17476933.2011.603417

E. Fujikawa and K. Matsuzaki, Non-divergent infinitely discrete Teichmüller modular transformation, Topics in finite or infinite dimensional complex analysis, pp. 97-102, Tohoku Univ. Press, 2013. (査読有)

E. Fujikawa and K. Matsuzaki, The Nielsen realization problem for asymptotic Teichmüller modular groups, Trans. Amer. Math. Soc. 365 (2013), 3309-3327. (査読有) DOI: 10.1090/S0002-9947-2013-05767-4

K. Matsuzaki and Y. Yabuki, No proper conjugation for quasiconvex cocompact groups of Gromov hyperbolic spaces, In the tradition of Ahlfors-Bers. VI, pp. 125-136, Contemp. Math. 590, Amer. Math. Soc., 2013. (査読有) DOI: 10.1090/conm/590

K. Matsuzaki, Petersson series vanishes at infinity, Quasiconformal mappings, Riemann surfaces, and Teichmüller spaces, Contemporary Math. 575 (2012), 299-311. (査読有) DOI: 10.1090/conm/575

P. Bonfert-Taylor, K. Matsuzaki and E. C. Taylor, Large and small covers of a hyperbolic manifold. J. Geom. Anal. 22 (2012), 455-470. (査読有) DOI:10.1007/s12220-010-9204-6

[学会発表](計 27 件)

松崎克彦, ヘルダー連続微分をもつ円周の微分同相写像の位相群と等角重心拡張複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺 (京都教育大学), 2015 年 12 月 13 日.

松崎克彦, 円周の微分同相写像の等角重心拡張について, 東工大複素解析セミナー, 2015 年 11 月 11 日.

松崎克彦, ヘルダー連続微分をもつ円周の微分同相写像の等角重心拡張の連続性, 日本数学会秋季総合分科会 (京都産業大学), 2015 年 9 月 14 日.

松崎克彦, 1 点穴あきトーラスの単純閉測地線の長さ, 第 50 回函数論サマーセミナー (あだたらふれあいセンター), 2015 年 9 月 5 日.

K. Matsuzaki, The hyperbolic metric on the complement of the integer lattice points in the plane, 第 23 回有限無限次元複素解析国際会議 (九州産業大学), 2015 年 8 月 26 日.

K. Matsuzaki, The exponents of normal subgroups of a hyperbolic group, Geometry and Analysis of Discrete Groups and Hyperbolic Space (京都大学数理解析研究所), 2015 年 6 月 23 日.

松崎克彦, The barycentric extension of circle diffeomorphisms, リーマン面・不連続群研究集会 (大阪大学), 2015 年 2 月 16 日.

松崎克彦, 単位円板の一漸近的等角写像の歪曲定理と等角拡張のシュワルツ微分について, 東北複素解析セミナー 2015 年 2 月 4 日.

松崎克彦, The universal Teichmüller space and diffeomorphisms of the circle with Hölder continuous derivatives, 複素力学系の総合的研究 (京都大学数理解析研究所), 2014 年 12 月 8 日-9 日.

松崎克彦, 円周の微分同相写像の等角重心拡張について, ポテンシャル論研究集会 (福山大学), 2014 年 9 月 4 日.

K. Matsuzaki, A certain circle diffeomorphism with Hölder continuous derivative, 第 22 回有限無限次元複素解析国際会議 (東国大学), 2014 年 8 月 9 日.

松崎克彦, Uniform convexity, normal structure and the fixed point property of metric spaces, 幾何学トポロジー研究集会 (早稲田大学) 2014 年 3 月 25 日.

松崎克彦, 一般化された写像類群とタイヒミュラー空間 (ニールセン実現問題から円周の微分同相写像群の固定点問題へ), 数理学談話会 (金沢大学), 2014 年 1 月 17 日.

K. Matsuzaki, Circle diffeomorphisms and Banach structures on the universal Teichmüller space, Rigidity School (東京大学), 2014 年 1 月 6 日-10 日.

K. Matsuzaki, Proper conjugation for a group of isometries of Gromov hyperbolic space, International Conference on Topology and Geometry 2013 (島根大学) 2013 年 9 月 2 日.

松崎克彦, 普遍タイヒミュラー空間の線形化: 剛性と固定点問題, リーマン面に関連する位相幾何学 (東京大学), 2013 年 8 月 26 日.

K. Matsuzaki, The Chabauty and the Thurston topologies on a family of closed subsets, Analysis and Geometry of Riemann Surfaces and Related Topics (東京工業大学), 2013 年 6 月 21 日.

K. Matsuzaki, Integrability of quasi-symmetric quotients, 第 21 回有限無限次元複素解析国際会議 (南京大学), 2013 年 6 月 17 日.

松崎克彦, ヘルダー連続微分をもつ円周の微分同相写像のタイヒミュラー空間, 複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺 (龍谷大学), 2013 年 6 月 9 日.

- 松崎克彦, A Teichmüller space of a group of circle diffeomorphisms and its rigidity, 幾何学セミナー(名古屋大学), 2013年5月21日.
- 21 松崎克彦, 閉集合族の Chabauty 位相と Thurston 位相, 幾何学的トポロジーセミナー(早稲田大学), 2013年5月13日.
- 22 K. Matsuzaki, Rigidity of groups of circle diffeomorphisms and Teichmüller spaces, Advances in Teichmüller theory (Erwin Schrödinger Institute for Mathematical Physics), 2013年2月6日.
- 23 K. Matsuzaki, Circle diffeomorphisms and Teichmüller spaces, リーマン面・不連続群研究集会(大阪大学), 2013年1月14日.
- 24 K. Matsuzaki, Conjugation of a group of circle diffeomorphisms, Rigidity School 2012-13, (東京大学), 2013年1月9日.
- 25 松崎克彦, Conjugation of a group of symmetric homeomorphisms of the circle, 函数論シンポジウム(金沢大学), 2012年11月24日.
- 26 松崎克彦, 円周の微分同相写像群のメビウス群への共役, 日本数学会秋季総合分科会(九州大学), 2012年9月18日.
- 27 K. Matsuzaki, Conjugation of a circle diffeomorphism group to a Möbius group, Group Actions and Applications in Geometry, Topology and Analysis (昆明理工大学), 2012年7月28日.

〔図書〕(計1件)

K. Matsuzaki and T. Sugawa, Topics in finite or infinite dimensional complex analysis, Tohoku Univ. Press, 2013, 268 pages.

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.f.waseda.jp/matsuzak/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松崎 克彦 (MATSUZAKI KATSUHIKO)
早稲田大学・教育総合科学学術院・教授
研究者番号：80222298

(2) 連携研究者

谷口 雅彦 (TANIGUCHI MASAHIKO)
奈良女子大学・自然科学系・教授
研究者番号：50108974

藤川 英華 (FUJIKAWA EGE)
千葉大学・理学研究科・准教授