様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 １７ 日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2012～2014
課題番号：２４６５４０３６

研究課題名（和文）双曲型性と放物型性との間に横たわる階層構造の解明

研究課題名（英文）Study for hierarchical structure underlying between hyperbolicity and parabolicity

研究代表者
大谷　光春（otani, mitsuharu）

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：３０１１９６５６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：物理学をはじめとする自然科学における様々な現象を記述する偏微分方程式の数学的研究は極めて重要である．しかしながら，双曲型方程式の典型例である波の伝播を記述する波動方程式と放物型方程式の代表例である熱の伝播を記述する熱方程式とは，その解の振る舞いが著しく異なるため，その研究手法も研究者の層も乖離しているという現状がある．
強い減衰項を有する波動方程式は，ある種の放物型性を発現するという，研究代表者の予備的研究を基に，減衰項を有する抽象双曲型方程式が放物型性を獲得するメカニズムを明らかにし，双曲型性と放物型性との間に横たわる階層構造を解明した．

研究成果の概要（英文）：It is very important to pursue mathematical study for Partial Differential Equations which describe various phenomena arising in natural sciences such as Physics. However, since the behavior of solutions of wave equation, a typical example of hyperbolic equation, and heat equation, a typical example of parabolic equation, is quite different to each other, the method of study and the group of researchers are both separated. Based on the fact that wave equation with strong dissipation acquires some parabolicity which was detected by research representative, we studied some abstract hyperbolic equation with strong dissipation and clarified the mechanism of acquiring the parabolicity and revealed the hierarchical structure underlying between hyperbolicity and parabolicity.

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：放物型方程式　双曲型方程式　発展方程式　平滑化現象

1. 研究開始当初の背景

時間発展をともなう偏微分方程式は，通常，波動方程式に代表される**双曲型方程式**，シュレディンガー方程式に代表される**分散型方程式**（ここでは，双曲型方程式と分散型方程式をまとめて**「双曲型方程式」**と記すことにする），さらには，熱方程式・拡散方程式に代表される**放物型方程式**に大別されることが多いが,「双曲型方程式」と「放物型方程式」とでは，その研究手法が大幅に異なるばかりでなく，それぞれの研究者の層も大きく分離している．このような状況を生じさせている主たる原因として，両分野にまたがる数学的研究課題がほとんど存在していないという事実が挙げられる．西原健二氏（早大）や楢崎隆氏（東海大）等は，弱い減衰項をもつ波動方程式

(WDW) $u_{tt} - \Delta u + u_t = 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,+\infty)$, $(u,u_t)|_{t=0} = (u_0,u_1)(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$

を研究し，(WDW) は「平滑化効果」は有しないものの，その解は $t \to +\infty$ で，熱方程式の解に漸近する（即ち，w を (WDW) と同じ初期条件を満たす波動方程式 (W) $w_{tt} - \Delta w = 0$ の解とし，h を (H) $h_t - \Delta h = 0$, $h(0) = u_0 + u_1$ の解とすると，w の $t \to +\infty$ での漸近形は $w(x,t) \sim h(x,t) + e^{-t/2} w(x,t)$ で与えられる．i.e., u の双曲型性から由来する部分 w は指数的に減衰し，放物型性を起源とする部分 h に漸近する）ことを示した． この事実は「(WDW) は，通常の意味での放物型ではないものの，$t \to +\infty$ では放物型的振る舞いをする」ことを意味しており，ある意味で**「弱い放物型性」**を有していることを示唆している．

2. 研究の目的

上に述べた観点から，研究代表者者はかねてより，両分野にまたがる研究課題を探索していたが，その糸口となる，強い減衰項 $-\Delta u_t$ をもつ波動方程式

(SDW) $u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t = 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,+\infty)$, $(u,u_t)|_{t=0} = (u_0,u_1)(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$

が放物型方程式の特性の一つである**「平滑化効果」**を有する事実を見出した．本研究の主たる目的は，強い減衰項をもつ双曲型方程式が，どのようしてに放物型性を獲得するかを明らかにし，双曲型性と放物型性に横たわる階層構造を解明することにある．

3. 研究の方法

双曲型性と放物型性との間に横たわる階層構造を解明するためのプロトタイプモデルとして，

$(\mathrm{DW})_\alpha$ $u_{tt} - \Delta u + (-\Delta)^\alpha u_t = 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,+\infty)$, $(u,u_t)|_{t=0} = (u_0,u_1)(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$

を考える．ここで，$(-\Delta)^\alpha$ は $-\Delta$ の α-位の分数冪（$\alpha \in [0,1]$）をあらわし，$(\mathrm{DW})_\alpha$ は，$\alpha = 0$ の時 (WDW)，$\alpha = 1$ の時 (SDW) と一致する．双曲型と放物型を別ける現象として, **(a) 平滑化効果 (b) 解析半群の生成 (c) 有限伝播性 (d) 生成半群の L^∞ における有界性 (e) 比較定理の成立** をとりあげ, それぞれどこに，これ等の現象が発現する α の臨界値があるかを検証し, 双曲型性と放物型性との間に横たわる階層構造の解明の糸口を探る．さらに, シュレンディンガー方程式などの分散型方程式に対しても, 同様の試みを行う．

4. 研究成果

強い減衰項をもつ波動方程式

$(\mathrm{DW})_\alpha$ $u_{tt} - \Delta u + (-\Delta)^\alpha u_t = 0$ をモデルに，実ヒルベルト空間 H 上の正値自己共役作用素 A に対し

$(\mathrm{E})_\alpha$ $u_{tt} + Au + c\,A^\alpha u_t = 0$

の放物型性に関して研究した．(但し， A^α は A の α 位の分数冪作用素, c は正定数)

(1) （解の存在・一意性・滑らかさ）$(\mathrm{E})_\alpha$ を含む，かなり一般的な抽象方程式に対する，解の存在・一意性及び解の滑らかさに関する結果が得られた．

(2) （コンパクト性）$\mathcal{H} = H \times D(A^{1/2})$, $U = (u, u_t)$,

$\mathcal{A}U = (-u_t, Au + a\,A^\alpha u_t)$ とおき，$(\mathrm{E})_\alpha$ を

$(\mathrm{AE})_\alpha$ $dU(t)/dt + \mathcal{A}U(t) = 0$ と書き直す．

$D(A^{1/2})$ が H にコンパクトに埋め込まれているという仮定の下で以下が成り立つ．

① $0 < \alpha < 1$ の時, $\mathcal{A}$ のレゾルベント $(I + \mathcal{A})^{-1}$ は コンパクト作用素になる．

② $1 \le \alpha$ の時， $(I + \mathcal{A})^{-1}$ はコンパクト作用素にならない．

この事実は，放物型方程式の特徴の一つであるリゾルベントのコンパクト性が $\alpha = 1$ を閾値として失われるという事を意味し,「α が大きくなればなるほど，減衰効果が増すので，放物型性も増すであろう」という常識的な予想を覆す極めて重要な知見である．

(3) （時間に関する平滑化）$\mathcal{A}$ によって $\mathcal{H}$ 上に生成される半群 $S(t)$ の正則性に関して次の結果を得た．

① $\frac{1}{2} \le \alpha$ の時，$S(t)$ は正則半群を生成し，次の評価を満たす．

$$|\mathcal{A}S(t)U|_{\mathcal{H}} \le \frac{C}{t} |U|_{\mathcal{H}} \quad \forall t > 0.$$

② $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ の時，$S(t)$ は次の評価を満たす．

$$|\mathcal{A}S(t)U|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{\beta}}|U|_{\mathcal{H}} \quad (\beta = \frac{1}{2\alpha})\ \forall t > 0.$$

更に，A が非有界作用素で A^{-1} がコンパクトであれば，上の評価は $\beta > \frac{1}{2\alpha}$ に対して成り立たない，即ち $S(t)$ は正則半群を生成しない．

この事実は，放物型方程式の特徴の一つである生成作用素から生成される半群の正則性の閾値が $\alpha = \frac{1}{2}$ であることを意味している．

(4) (空間に関する平滑化) $0 < \alpha < 1$ の時は，$(\mathrm{DW})_{\alpha}$ の解は

$u \in C^{\infty}((0,\infty); D(A^n)) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

を満たすが，$\alpha = 1$ に対しては，この事実が成り立たない事を，反例を示すことによって示した．即ち，空間に関する平滑化現象をわける閾値は $\alpha = 1$ となる．

(5) (解のバナッハ空間における有界性) 偏微分方程式への応用を考える時，L^p-空間 $(1 \leq p \leq \infty)$ や 連続関数の空間における解の評価も重要な情報である．
この様な状況を想定して，新たなバナッハ空間 X を導入し，L はヒルベルト空間 H 上の正値自己共役作用素，バナッハ空間 X は，ある自然数 m が存在して $D(L^m) \subset X \subset H$ を満たし，X に制限された L は X 上の C_0 半群を生成するものとする．この時，次の方程式に対し次の結果を得た．

$(\mathrm{L})_2 \quad u_{tt} + L^2 u + c\,L\,u_t = 0.$

$c \geq 2$ とし，L は X で正則半群を生成するとする．この時，初期値が
$u(0) = u_0 \in D_X(L), \quad u_t(0) = u_1 \in X,$
$D_X(L) := \{x \in D(L) \cap X; L\,x \in X\}$ を満たせば，$(\mathrm{L})_2$ の解 $u(t)$ は次の評価を満たす．
$\|u(t)\| + \|Lu(t)\| + \|u_t(t)\| \leq C(\|u_0\| + \|Lu_0\| + \|u_1\|)$,
ここで $\|u\|$ は X のノルムを表す．

(6) (まとめ)

① 従来の放物型方程式においては，放物型性を特徴付ける性質は色々存在するものの，「放物型性」は単一な概念と見做されてきたが，(2)-(4) の事実は，放物型性を特徴付ける性質によってその発現する α の閾値が異なるという，「放物型性」とは単一の数学的概念をあらわすものではなく，その強さに関するヒエラルキー構造を有した集合体的概念であることを明らかにした．
② (5) の抽象的結果は，$H = L^2(\Omega)$, $L = -\Delta$,

$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $X = L^p(\Omega) \quad p \in (2,\infty]$,
または $X = C_0(\Omega) := \{u \in C(\bar{\Omega}); u|_{\partial\Omega} = 0\}$ に対して応用できる．

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 10 件)

① Mitsuharu Ôtani and Vasile Staicu, Existence esults for quasilinear equations with multivalued terms, Set-Valued and Variational Analysis, Vol.22 (2014), pp. 859-877, DOI:10.1007/s11228-014-0289-0, 査読有.

② Gaku Hoshino and Tohru Ozawa, Analytic smoothing effect for nonlinear Schrödinger equation in two space dimensions, Osaka J. Math., Vol.51 (2014), pp. 609-618, 査読有.

③ Kenji Nishihara and Yuta Wakasugi, Critical exponent for the Cauchy problem to the weakly coupled damped wave system, Nonlinear Analysis, Vol.108 (2014), pp. 249-259, DOI: 10.1016/jna.2014.06.001, 査読有.

④ Alain Haraux and Mitsuharu Ôtani, Analyticity and regularity for a class of second order evolution equations, Evolution Equations and Control Theory, No.1, Vol.2 (2013), pp. 101-117, 査読有.

⑤ Mitsuharu Ôtani and Shun Uchida, Global solvability of some double-diffusive convection system coupled with Brinkman-Forchheimer equations, Libertas Mathematica, No.1, Vol.33 (2013), pp. 79-107, 査読有.

⑥ Mitsuharu Ôtani and Shun Uchida, The existence of periodic solutions of some double-diffusive convection system baased on Brinkman-Forchheimer equations, Advances in Mathematical Sciences and Applications, No.1, Vol.23 (2013), pp. 77-91, 査読有.

⑦ Shuji Machihara, Tohru Ozawa and Hidemitsu Wadade, Hardy type inequalities on balls, Tohoku Math. J., Vol.65 (2013), pp. 321-330, 査読有.

⑧ Kenji Nishihara, Diffusion phenomena of solutions to the Cauchy problem for the damped wave equations, 数学 (Sugaku Expositions) 日本数学会, No.1, Vol.26 (2013), pp. 29-47, 査読有.

⑨ Hideaki Sunagawa, Tohru Ozawa and Soichirou Katayama, A note on the null condition for quadratic nonlinear Klein-Gordon systems in two space dimensions, Commun. Pure Appl. Math, Vol.65 (2012),

pp. 1285-1302, 査読有.

⑩ Kenji Nishihara, Asymptotic behavior of solutions for a system of semilinear heat equations and the corresponding damped wave system, Osaka J. Math. Vol.49 (2012), pp. 331-348, 査読有.

〔学会発表〕(計 10 件)

① Shun Uchida and Mitsuharu Ôtani, Large time behavior of solutions for double-diffusive convection systems based on Brinkman-Forchheimer equation, The 10th AMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Madrid Spain, 2014/July/09.

② Tohru Ozawa, Quadratic interactions in dissipative systems, 微分方程式の総合的研究, 京都大学, 2014/Dec./20.

③ Mitsuharu Ôtani, On some mathematical models for swelling process of mitochondria, Conference on Nonlinear Phenomena in Biology, Physics and Mechanics, Helmholtz Center Munchen Germany, 2014/March/03.

④ Mitsuharu Ôtani, On an ODE-PDE model for the swelling process of mitochondria, The Diliman Mathematics Research Workshop, University of the Philippines, Diliman, Philippines, 2013/Oct./15.

⑤ Mitsuharu Ôtani, Global solvability of some double-diffusive convection systems, International Workshop on Diffuse Interface Models-DIMO2013, Levico Terme, Italy, 2013/Sept./10.

⑥ Mitsuharu Ôtani, Mathematical analysis for an ODE-PDE model for the swelling process of mitochondria, 5th Polish-Japanese Days on Nonlinear Analysis in Interdisciplinary Sciences, Kansai Seminar House Kyoto, 2012/Nov./05.

⑦ Tohru Ozawa, Sharp bilinear estimate on the Klein-Gordon equation, Seminar on Differential Equations in Osaka, Osaka University Osaka, 2012/Aug./21.

6. 研究組織

(1) 研究代表者
大谷 光春(OTANI Mitsuharu)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号:30119656

(2) 研究分担者
小澤 徹(OZAWA Tohru)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号:70204196

(3) 研究分担者
西原 健二(NISHIHARA Kenji)
早稲田大学・政治経済学術院・教授
研究者番号:60141876