

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 23 日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2012～2014

課題番号：24654038

研究課題名(和文) 相関関数と行列係数

研究課題名(英文) Correlation functions and matrix coefficients

研究代表者

金井 雅彦 (Kanai, Masawhiko)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：70183035

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：力学系理論における相関関数と、ユニタリ表現論における行列関数は類似した概念である。その背後にある共通原理を発見が本研究の目的であった。まず公開アーベル群のアノソフ作用の典型例であるワイル領域流と呼ばれる力学系に着目した。このワイル領域流に対し Katok-Spatzier が示した剛性定理の証明において、あるユニタリ表現の行列係数の指数関数的減衰が本質的な役割を果たす。そこで、より一般のアノソフ作用に関しても同様な評価を得たい。その第一歩として、ワイル領域流に対する新たな幾何学的理解を試みた。その結果、ワイル領域流に対する剛性定理の新たな証明が完成しつつある。

研究成果の概要(英文)：Correlation functions in the theory of dynamical systems and matrix coefficients in unitary representation theory are quite similar notions. The aim of the present research plan was to uncover common principles behind them. For these purposes, I took look at what is called Weyl chamber flows, which are typical examples of Anosov actions of abelian groups. In the proof of a rigidity theorem of those flows, which was done by Katok and Spatzier, the exponential decay of the correlation function of some unitary representation took the most serious part. I wanted to generalize such a decay estimate to 'less symmetric' flows. As the first step, I tried to make a new understanding of the Weyl chamber flows from a geometric view point. Although there still remain a few gaps, I am about to obtain a new proof of the rigidity theorem of Katok and Spatzier. Hopefully, I will publish a new paper on it soon.

研究分野：幾何学

キーワード：相関関数 行列係数 ワイル領域流 剛性定理

1. 研究開始当初の背景

力学系理論における相関関数(correlation function), およびユニタリ表現論における行列係数(matrix coefficient), これらふたつの概念の「実体」は, じつは同一のものである. 定義をみればただちに理解可能なこの事実が, どうも見過ごされてきたようである. 本研究課題の出発点はまさにここにある.

かつてフォン・ノイマンの時代には, エルゴード理論ないし力学系理論と, 表現論の間の距離はいまほど大きくなかったのではなからうか. 現にこれらふたつの数学分野の双方において足跡を残したフォン・ノイマンだけでなく, 彼の周辺にいた多数の数学者達ももちろんノイマンの影響もあつてのことではあるが— それらふたつの分野の関連性をよく理解していたよう想像する. しかし, その後時間の経過とともに, これらふたつの分野はそれぞれ独自の進化をとげ, その結果, 残念ながらふたつの分野間での交流も途絶えがちとなったのではなからうか. とくに, 力学系理論における相関関数とユニタリ表現論における行列係数の類似性を認識している研究者ははたしてどれくらいいるのだろう. もちろんマルグリスは間違いなく知っているはずである(本人に確認したわけではないが). また, 例えば, A. カトックも知っているに違いない. しかし他はどうだろう. 少なからずの研究者, それも力学系理論やエルゴード理論, あるいは表現論の専門家の多くとこのことについて話しあつたことがあるが, 彼等の中でこの類似性に気づいているものはいなかった. 数学においても分野への細分化が進んでいることが, やはりその理由であろう. 試みにMathSciNet を使って以下のような検索をした. “Correlation function” を“anywhere” に含むもの7441 (ただし, この中には古典力学の相関関数ではなく, 別の文脈でのそれも多数含まれると想像する), “matrix coefficient” を“anywhere” に含むもの1062 であつた. しかし, これらふたつの語の両方を“anywhere” に含むものとなると, わずか6 件しかヒットしなかつた. そもそも, 力学系の相関関数について述べている, あるいは力学系の相関関数に関する論文を引用しているユニタリ表現論の文献も見覚えがないければ, 逆にユニタリ表現論の

相関関数に言及している力学系の論文も私は数本しか知らない.

本研究の背景についてさらに述べるためには, 力学系に対する相関関数とユニタリ表現における行列係数の間に存在する差異について少々説明したい. ユニタリ表現に対する行列係数に対しては, その無限遠方における減衰速度が問題になる. したがって, 表現される群は非コンパクトなリー群(ないし代数群)である. とくに, 群の無限遠方で行列係数が十分にはやく減衰することを期待する際には, リー群 G に対し半単純であるという仮定を課すことが通常行われる. 一方, 力学系, とくに古典力学系においては, 流れ, すなわち可群 R の作用が問題とされる. 半単純リー群は R と比して圧倒的に「大きく」, 「豊か」であつ「複雑」である. そのような群の作用がある分, 表現論は圧倒的に有利である. あるいは, 表現論は力学系に比べ圧倒的に高い対称性の下で仕事をしている, と述べることもできるかも知れない. その利を徹底的に活かしてなされるのが, ユニタリ表現の行列係数の評価である. 一方, 力学系の場合, 対称性には恵まれない. そもそもそれこそが力学系の豊穡性の源なのであるから, 致し方ないことである. しかし, それでも相関関数の評価がなされてきた. 表現論が扱う対象よりははるかにワイルドな対象を, 苦労を重ねながらも, 扱えるよう努力してきた, それが力学系理論における相関関数の評価に関する一連の成果である. 表現論と力学系, 問題とする対象の特性も違えば, またそれらを扱う手法も異なる. ふたつの理論を往復することにより, この差異を積極的に活用することを目指す.

2. 研究の目的

看過されてきた上述の認識から出発し, ふたつの分野を必要に応じて行き来しながら, 相関関数や行列係数に対する評価を得るための新たな手法の開発を目指すとともに, 得られた評価の新たな応用を追求する. とくに応用としてカトック=スパッチツェにより提出された自由アーベル群のアノソフ的作用に関する予想に挑みたい.

形式的には, 力学系に対する相関関数は, ユニタリ表現に対する行列係数の特殊なものとなすことができる. しかし, 実際にはこ

のふたつの概念の間には、あるいはこれらふたつの概念により記述の対象とされる系と、減衰を証明する手法には、大きな差異が観察される。本研究課題においては、まずふたつの分野のおおのにおいてこれらの概念がどのような扱いを受けてきたかを検証したい。その上で、そのふたつの概念の間にある類似性を相違性を追求する。その結果として、新たな手法の開発と新たな応用の発見、とくにカトック＝スパッチェ予想の解決が実現できたらと願っている。

3. 研究の方法

階数 k が 2 以上の自由アーベル群 R^k の作用は、 R の作用、すなわち流れとは異なり、その構成自体全く非自明である。実際、そのような群作用でさらに強い双曲性を有する力学系 --- それをアノソフ作用と呼ぶことにする --- は、代数的な仕方で構成される対称性の強いものしかないであろうと予想されている (Katok--Spatzier)。この予想解決へ向けての第一歩として、自由アーベル群のアノソフ作用に対し、相関関数 (=行列係数) の減衰評価を行いたい。一方、行列係数の減衰評価と Bekka-Meyer の不等式と間に強い関係があるのではないかと期待している。さらに、Bekka-Meyer の不等式の非線形化というより野心的な主題にも挑みたいと願っている。

4. 研究成果

まず高階アーベル群のアノソフ作用の典型例であるワイル領域流と呼ばれる力学系に着目した。このワイル領域流に対し Katok-Spatzier が示した剛性定理の証明においては、あるユニタリ表現の行列係数の指数関数的減衰が本質的な役割を果たす。そこで、より一般のアノソフ作用に関しても同様な評価を得たい。その最初の一步として、ワイル領域流に対する新たな幾何学的理解を試みた。

そもそもワイル領域流は高階の半単純リー群とその一様格子を使って構成される。そして、ワイル領域流の剛性と、その半単純リー群の境界に対する格子の作用の剛性は (ほぼ) 等価の問題である。その格子の作用の局所剛性を、カトック＝スパッチェとは独立に、かつて私自身証明している。ただし、その証明にいくつかの難点 (ギャップではない) があることを私自身認めていた。その証

明の改良を試みた。その過程で、高次元シュワルツ微分を再発見し、さらにはヒル方程式の高次元化にも成功した。これらのことは、本研究課題とは独立に、極めて重要な発見であったと自負している。またその甲斐あって、格子の境界への作用に対する局所剛性定理に対し、かつて自らが与えた証明よりも、また Katok-Spatzier の証明よりも明快・簡潔な証明が得られつつある。ただし、その完成のためには、まだいくつか解消せねばならない問題点が残ってはいる。そのひとつは、離散群の作用の固有不連続性に関するものである。その種の研究は半世紀ほど前から、ヴェイユ達によって成されているが、わたしが必要なのは、それよりも一般的なものである。幸い、必要な一般化の証明にもほぼ目処がついたところである。その結果、ワイル領域流あるいはそれに付随して得られる離散群作用に対する剛性定理の新たな証明がほぼ完成している。近日中にそれを公開できればと望んでいる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 0 件)

[学会発表] (計 7 件)

1. M. Kanai, Cross ratio and its folks in geometry and dynamics, Tokyo--Seoul Conference in Mathematics -- Differential Geometry, Univ. Tokyo, December 1, 2013.

2. M. Kanai, Cross ratio and its folks in geometry and dynamics I, II, A workshop on "Geometry of Moduli Space of Low Dimensional Manifolds", RIMS, Kyoto, November 7, 2013.

3. M. Kanai, Cross ratio and its folks in geometry and dynamics, KIAS workshop on "Geometric Structures, Rigidity and Deformation Space", August 12--16, Jeju, Korea.

4. 金井雅彦, 「複比とその仲間たち」, 談

話会，東京工業大学，2013年5月29日.

研究者番号：

5. 金井雅彦，「シュワルツ微分と群作用の剛性」，研究集会「複素力学系の新展開」，京都大学数理解析研究所，2012年12月.

(3)連携研究者

()

6. 金井雅彦，「複比とその仲間たち」，Rigidity Seminar，名古屋大学，2012年7月29日.

研究者番号：

7. 金井雅彦，「シュワルツ微分・射影構造・群作用」，研究集会「力学系とその周辺分野の研究」，京都大学数理解析研究所，2012年7月9日.

〔図書〕（計0件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計0件）

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

出願年月日：

国内外の別：

○取得状況（計 件）

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

出願年月日：

取得年月日：

国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者

金井雅彦 (KANAI, Masahiko)

東京大学大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：70183035

(2)研究分担者

()