

平成 27 年 6 月 4 日現在

機関番号：17102

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2012～2014

課題番号：24654042

研究課題名(和文)高次元量子系の行列積状態の挑戦的萌芽研究

研究課題名(英文)Matrix Product States of Quantum Systems on Higher Dimensional Lattices

研究代表者

松井 卓(Matsui, Taku)

九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：50199733

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 1,600,000円

研究成果の概要(和文): (i) 1次元系の並進不変純粋状態ではCuntz代数の既約表現とcanonical endomorphismの(その既約表現に対して正規)不変状態の組がMatrix Product Stateに対応するが2次元系では4つの互いに非可換なCuntz代数の表現を対応させることができる。(ii) ある種のMatrix Product Stateはfrustration free ground stateであるが、非調和振動子をあらかずボーズ粒子系に関して同様の対応を作れる。

研究成果の概要(英文): (i) We considered 2dim (infinite) quantum spin systems and obtain PEPS representations for any translationally invariant states using representations of a quadruplet of Cuntz algebras. Our construction is a generalization of the correspondence of Cuntz algebras and matrix product states in 1 dim quantum systems. (ii) We obtained a class of formal Hamiltonians for Bosonic systems on lattices for which frustration free ground states exist.

研究分野：数理物理

キーワード：量子スピン系 関数解析 基底状態

1. 研究開始当初の背景

以下では行列積状態を MPS(=matrix product state)と略す。MPS の最初の例は Affleck-Kennedy-Lieb-H.Tasaki の AKLT 模型の基底状態(1987)である。整数スピンの 1次元反強磁性ハイゼンベルクの基底状態について Haldane 予想を支持するとして導入された AKLT 模型であるが 1990 ごろ Fannes Nachtergaele R.Werner 等は AKLT 模型の基底状態の構成方法と L.Acardi の量子マルコフ状態の構成方法一般化であることに気づき数学的理論を展開した。この構成法で得られる状態を Fannes Nachtergaele R.Werner は finitely correlated state と呼んだが現在 MPS と呼ばれるものと同じである。並進不変純粋状態である MPS は現在 parent Hamiltonian とよばれるハミルトニアンの基底状態であり、MPS により多数のギャップを持つ基底状態が構成できたことになる。MPS は基底状態の中でも Frustration Free Ground States と呼ばれる基底状態である。

この研究の代表者である松井卓は 1999 年に、有限系の基底状態の次元がシステムサイズによらず有界であれば Frustration Free Ground States は MPS であることを証明した。さらに松井は MPS が並進不変基底状態になるハミルトニアンの並進不変でない基底状態が存在すれば、その基底状態は片側 MPS テンソル積状態から定まるソリトンセクター内のベクトルであることも証明した。

高次元の格子の上へ MPS の構成の拡張も Affleck- Kennedy-Lieb-H.Tasaki および Fannes Nachtergaele -R.Werner は考察した。しかし高次元 MPS は定義出来ても、「どのような条件で純粋状態であるか？」

「2点相関関数はどのような条件で指数的減衰するか？」という基本的問題は未解決である。既存の手法で解析可能な MPS の実例がない。

21世紀になり量子情報理論の研究が爆発的に増え、MPS が量子情報理論的観点か

ら自然な構成法であるので再度、脚光を浴びた。そこでスペクトル・ギャップの開いたハミルトニアンの基底状態は行列積状態に近いであろうという認識が広まり 2006 年辺りから、基底状態の entanglement entropy の面積則の成立すりが問題とされた。

2007年に物理学者 M.Hastings は 1次元系で finite range interaction から定まるハミルトニアンのスペクトルギャップを持つ基底状態の entanglement entropy の面積則の証明に成功した。M.Hastings の証明は非常に煩雑で背後の数学的構造が不明であった。

我々は 2010年から彼の研究に再検討を行い 1次元系の純粋状態で entanglement entropy の面積則が成立すると split 性という量子状態の弱い統計的独立性が成立する事を様々な仮定の下で示した。しかし 2012年の段階では技術的に、完全とは言い難い仮定をおいていた。

2. 研究の目的

2007年ごろより高次元格子上の MPS への関心が高まった。高次元 MPS の構成法により系を有限部分系に制限するとフォン・ノイマン・エントロピーの大きさは境界のサイズに比例することが分かる。(entanglement entropy の面積則)そこで entanglement entropy の面積則が一般の純粋状態に対して成立する条件が問題となる。1次元系では二点相関関数のハミルトニアンのスペクトル・ギャップが開くと entanglement entropy の面積則が成立し、その結果 Split 性が部分無限系で成立する。1次元系では Split 性を持つ状態が MPS の一般化を見なせて数理物理的応用が得られる。

高次元並進不変純粋状態で半平面に対して Split 性が成立すると積状態という自明な状態になり、高次元 MPS では本質的に新しい

考察を行う必要がある。

我々は高次元系特有の問題を解析するために、互いに可換な複数の完全正值写像の Dilation に注目する。複数の互いに(可換ではないが) canonical endomorphism が Cuntz 代数の組を考え、それらが生成する作用素環の表現の問題として Split 性に置き換わる概念を定め、entanglement entropy の面積則との関連を考察する。このような観点で MPS を研究するグループは世界的にも稀であり高度の独創性のある研究であると自負する。

作用素環的手法で MPS を研究することは量子情報、物性基礎論への応用の可能性を開くだけでなく、2次元、3次元局所場の量子論の構造理論を試す良い例を提供すると期待される。R. Haag 流の局所場の量子論の研究において通常はある種の Haag 双対性を仮定し研究が進められるが、実際に Haag 双対性が試される非自明な例は極めて限られている。

1次元格子模型ではスペクトルギャップが開くと split 性が成立し基底状態表現が片側無限系で Haag 双対性が成立するが、高次元格子模型で split 性に変わる概念が発見されれば Haag 双対性の証明の可能性が出る。その結果、格子模型での荷電セクター(一般化されたフュージョン則)も具体的に決定出来るであろう。現在、この方向で研究成果は Kitaev 模型および Z_2 ゲージ例しかない。MPS に類似のスペクトル・ギャップがある基底状態の Entanglement Entropy の面積則の証明を検討、frustration free ground state の Cuntz 代数を用いた記述、Dobrushin-Shlossmann のギブス測度の一意性理論の非可換版、および、位相的秩の数学的理論の構築をめざした。

3. 研究の方法

国内外で開催される研究会に参加し関連す

る研究を行う研究者と研究連絡を行った。この研究は作用素環的手法による局所場の量子論の研究成果に影響を受けているが、局所場の量子論の数学的研究のパイオニアである Rudolf Haag の 90 歳を祝う国際研究集会が 2012 年 8 月にハンブルクの DESY で開催され研究代表者も出席、低次元局所場の量子論の構成など最近の研究成果の全貌を知ることができ、この研究の推進に役立った。

一方、格子上のボーズ粒子系に対する MPS の類似物はこれまで十分な研究がされていなかった。言うまでもなく格子上のボーズ粒子系では、格子上の各点での代数が無限次元でありスピン系のような有限次元行列代数の完全正值写像を使った状態の構成は不可能である。しかしながら、研究代表者の松井が 1990 年から 1995 年ごろ示したように格子上の古典スピン系のギブス測度を用いて量子スピン系の基底状態を構成すると frustration free ground state になる。この事をヒントとすればボーズ粒子系の場合の MPS の類似物の構成の可能性がある。

ボーズ粒子系は非有界作用素のなす代数として扱うか、或は Weyl CCR 代数と呼ばれる位置作用素と運動量作用素の生成するユニタリーから定まる作用素環を使い統計力学的な研究を行うのが主流であった。しかしながら、これらのアプローチでは量子系の時間発展を与える自己同型を構成することが困難であり興味深い研究が行われていなかった。

D. Buchholz と Grundling は 2007 年ごろより超対称性を持つ場の量子論の数学的厳密な扱いの困難さを解決するために位置作用素と運動量作用素のレゾルベントが定める作用素環を考えることを提唱した。2014 年 3 月に D. Buchholz が東京大学と京都大学で行った講演に研究代表者は参加し、D. Buchholz と直接レゾルベント代数の未解決問題と可能性について議論することが出来た。

格子上のボーズ粒子系は非調和結晶とよばれる物理系の模型である。この方面での先行研究を行ってきた V. Zagrebnoy が 2014 年 12 月に共同研究のため金沢大学に訪問中に九州大学にも来てもらい我々は、非調和結晶の厳密統計力学的な研究成果に関してのレビューを行ってもらい我々が必要な研究情報の提供を得た。

一方、レゾルベント代数で表される量子系の時間発展を定める自己同型群の構成の研究のために擬微分作用素、シュレディンガー作用素の超局所解析に関する文献を集め、関連事項の情報を得た。

4. 研究成果

この研究も最終目標は一般次元での MPS の構造であるが最初に一次元系の研究の復習を行った。一次元系では split property を持

つ並進不変状態は matrix product state の一般化と見なせることが分かっている(2000年の松井の結果)しかし、相関関数の指数的減少やスペクトルギャップの存在を仮定すると split property が導けるかどうかは、2012年初めの時点では不明であった。実際、物理的直感ではスペクトルギャップから split property 導かれるのもっともらしいので我々は2000年に発表した論文では、これを予想としている。

M.Hasting は2007年に有限系の場合に finite range ハミルトニアンギャップのある基底状態では entanglement entropy の面積則が成立すること示し、我々は面積則から split property が導かれることを証明した。一方、F.Brandao と Horodecki は二点相関関数のある種の一様指数的減衰が成立すると entanglement entropy の面積則が成立することを証明した。F.Brandao と Horodecki の設定では有限系での相関関数のシステムサイズに一様な評価を仮定しているが Brandao-Horodecki や Hastings の証明は無限系で直接成立することを証明した。特に F.Brandao と Horodecki の仮定は finite range ではない指数的減衰する相互作用が定めるハミルトニアンギャップのある基底状態に関する K.Fredenhagen 型のクラスタ一定理の応用により得られる相関関数の減衰である。以上の成果と我々の研究をまとめると指数的減衰する相互作用が定めるハミルトニアンギャップのある基底状態について split 性が成立し、基底状態は MPS の自然な拡張であることが分かった。

二次元系では一般の並進不変状態に対して canonical endomorphisms は可換で元は互いに可換ではない Cuntz 代数の4つ組の表現を対応させることにより、もとのスピンの状態を Projected entangled paired state と同じ形式で表す新しい方法を得た。特に古典スピンのギブス測度から構成する基底状態の場合に Cuntz 代数の4つ組の表現の構成を行った。しかしながら frustration free ground state に対応する Cuntz 代数の4つ組の表現はどのような性質により特徴付けられるかは解明できなかった

位相的秩序を示す Kitaev 模型の基底状態は熱力学的極限において縮退がなくなることが分かった。Kitaev 模型の基底状態に対応する Cuntz 代数の4つ組の交換関係と anyon 的統計の関係を明らかにすることは出来なかった。

一方でボーズ粒子系の場合の研究を行った。Weyl CCR 代数の場合の準自由状態に関して Kakutani 型の二率則が成立することを山上滋(名大多元数理)と証明した。また量子非調和振動子に対応するボーズ粒子系の基底状態を frustration free ground state として実現できる場合が多数あることを発見した。(Buchholz-Grundling のレゾルベント代数の方法を使う)Buchholz-Grundling の

レゾルベント代数の方法によればCCR代数の特異表現(量子場の強さが無限大になるような極限)が合理的に扱えることが判明した。

量子非調和振動子の基底状態での相転移に関してトンネル効果の影響で臨界次元がスピン系と異なることが予想されているが、過去の先行研究では位置座標作用素の関数についての相関関数のみが研究された。粒子間相互作用が弱いときに摂動論的方法で我々はレゾルベント代数の枠組みで運動量作用素の関数の相関関数を非有界スピン系のギブス測度の相関関数として表せることを発見した。この方向の研究は現在(2015年5月)も進行中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計2件)

- ・ Taku Matsui, Boundedness of Entanglement Entropy and Split property of Quantum Spin Chains, Rev.Math.Phys.25.2013
- ・ Taku Matsui S.Yamagami Kakutani dichotomy on free states Lett. Math.Phys102,2012,285

[学会発表](計3件)

- ・ 発表者:松井卓 題名「レゾルベント代数とボーズの統計力学」(京都大学数理解析研究所研究集会「量子場の数理とその周辺」)2014年10月8日
- ・ 発表者:松井卓 題名「Matrix product state をめぐって」(作用素論作用素環研究集会、東洋大学2014年12月24日)
- ・ 発表者:松井卓 題名「On Frustration Free Ground States(QI workshop2015 国立情報学研究所2015年2月18日)

[図書](計1件)

著者:松井卓
作用素環と無限量子系、サイエンス社、2014、157

[産業財産権]

出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:
取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:

番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：
〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者

松井卓（マツイタク）

研究者番号：50199733

(2)研究分担者

()

研究者番号：

(3)連携研究者

()

研究者番号：