

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 29 日現在

機関番号：34316

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2012～2014

課題番号：24654044

研究課題名(和文) 反応拡散方程式系におけるアトラクタの崩壊と遷移過程の新しい理論の確立

研究課題名(英文) New theory for transient dynamics in reaction-diffusion systems allowing collapse of attractors

研究代表者

森田 善久 (MORITA, YOSHIHISA)

龍谷大学・理工学部・教授

研究者番号：10192783

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：反応拡散系における大域アトラクタが、摂動によって1点からなるアトラクタに崩壊するとき、そのダイナミクスは構造的に大きく変わるが、時間的な遷移過程においては摂動前のアトラクタ上の軌道の振舞いとよく似た振舞いをする軌道が存在する。保存則をもつ反応拡散系において、実際に摂動を加えた場合に、遷移的な解の振舞いとしてチューリング的なパターンが発生し、単一のスパイクパターンに変化したのち、最終的にパターンが崩壊することを具体例で示した。このとき、摂動系ではチューリング不安定化を起こすような定常解が摂動によって消滅するにも拘わらずチューリング的なパターンが遷移過程で現れることが示された。

研究成果の概要(英文)：We consider reaction-diffusion systems having a global attractor which collapses and turns to be a single stationary state by a perturbation. Although the dynamical structure largely changed by the perturbation, there is a perturbed orbit close to the unperturbed one during a transient time. In a specific reaction-diffusion system with conservation law we show for the perturbed system that a Turing-like wave takes place and it changes to a single spike, then the pattern finally collapses. The perturbed system has no longer steady state solutions which induce a Turing type instability. Nonetheless in the transient dynamics such a Turing-like pattern can be shown.

研究分野：応用解析

 キーワード：遷移ダイナミクス 反応拡散系 大域アトラクタ アトラクタの崩壊 散逸力学系 保存則 摂動系  
 チューリング的なパターン

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 反応拡散方程式系のような散逸性のある発展方程式の研究目標の一つに、時間無限大での漸近挙動を明らかにすることがある。大域アトラクタが存在する場合にはその構造を解明することで、解の挙動が深く理解できる。実際、スカラー反応拡散方程式系では、その遷移的なダイナミクスが大域アトラクタの構造と深く結びついていることが知られており、空間1次元の場合には大域アトラクタの構造自体が明らかになっている具体例もある。一方で、漸近状態が自明な定常解しか存在しない場合、すなわち大域アトラクタが唯一の平衡点からなるような場合においても、その遷移過程で興味あるパターンが出現することが数値シミュレーションによって報告されており、そのような遷移過程における挙動の研究が注目を浴びつつある。しかしながらそのような例は、2変数以上の反応拡散方程式系の場合で、比較原理や変分原理が直接適用できない。また、大域アトラクタの構造が自明なため、遷移パターンを研究するアプローチの方法が全く確立されていなかった。

(2) 力学系の観点から見ると、考える方程式系の定常状態は自明な定数解しかなく、解の力学系が作用する無限次元相空間において、その定常点の近くから出発した解の軌道が、初期点から大きく離れ、長い遷移過程の後、平衡点に漸近するような解軌道が構成できれば、このときの遷移過程では空間構造をもった解が時間的に変化するもので、様々な空間パターンの変遷が期待される。

## 2. 研究の目的

上記のような問題に対するアプローチを確立するため、自明でない大域アトラクタをもつ反応拡散系を考え、摂動によってアトラクタが唯一の平衡点に変化する(アトラクタの崩壊)場合を考える。通常の大域アトラクタは小さな摂動で大きく変化することはないが、反応拡散系で保存則をもつクラスの場合、小さな摂動でも保存則を壊すとアトラクタは1点に崩壊する。そこで、このような保存則のある方程式系でアトラクタが豊かな構造をもっている場合を調べ、それが摂動によって崩壊しても、もとの非摂動系の解挙動

を遷移過程として持つ解軌道が存在することを示す。こうして、摂動系では、すべての解が自明な定常解に最終的に漸近するが、遷移過程では時空間パターンの変化を見ることができる。

## 3. 研究の方法

(1) 非摂動系として保存則をもつ反応拡散系をとりあげる。保存則という強い制約がある場合でも、チューリング的不安定化が起こる場合があるので、その場合のアトラクタの構造を調べる。チューリング不安定性によってチューリングパターンは確かに生じるが、最終的な空間パターン(安定な空間非一様な解)は、方程式系のもつ性質と条件に依存する。

(2) このような系に摂動を加えることによって、アトラクタが唯一の平衡点に崩壊する数学的な条件を導き、摂動系においても解軌道が遷移過程でチューリング的なパターンを生み出すことを力学系の不変多様体および不変葉層の理論を使って示す。チューリング不安定性が生じるためには、空間一様な定数解が存在して常微分方程式の解として安定で、それが拡散によって不安定化する必要がある。摂動系ではそのような定数定常解は存在しなくなるが、非摂動系での不変多様体周辺の力学系の構造が、小さな摂動によっても維持されることを示す。

(3) 数値シミュレーションも併用しながら、時間大域的な解挙動を追い、それが非摂動系の解の挙動を遷移過程で良く再現していることを示す。

(4) 保存則のある方程式系だけでなく、他のクラスの系についても、摂動によってアトラクタの構造が大きく変化する場面を見つけ、遷移過程の時空間パターンの変化を記述できるように理論を発展させる。

## 4. 研究成果

(1) 保存則のある系では、初期値問題の解について正值性が成り立つような場合には、摂動によってアトラクタが唯一の平衡点に縮退することが示された。

(2) 反応拡散系の解が生成する無限次元力学系の相空間において、保存量の値に対応して平衡点の連続体ができる。チューリング不安定性は、一つの保存量を固定したアフィン空間上で生じていることがわかる。各平衡点では安定多様体と不安定多様体が存在し、平衡点の連続体を作る中心多様体の周りでは不変な葉層構造ができていることに着目し、摂動によっても擬似中心多様体とその葉層構造が残ることを示した。これによって摂動系でもチューリング的パターンが生じることがいえる。

(3) 数値シミュレーションを使って、実際に摂動系が非摂動系の挙動を途中まで再現していることを示した。

(4) アトラクタを劇的に変化させるために、アトラクタを崩壊させるような摂動を考えてきたが、そのような摂動だけでなく、保存系の性質を利用すると、チューリングパターンと空間的に様な状態の振動を繰り返す系を発見することができた。

(5) チューリング不安定性の研究において、研究分担者の鈴木は、拡散性のない物質が混ざったような系においてもチューリング不安定性が生じる場合があることを示した。しかも、平衡解がすべて不安定になるというこれまでにない構造をもった方程式系が存在することも発見した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

- ① C.-N. Chen, S. Jimbo, Y. Morita, Spectral comparison and gradient-like property in the FitzHugh-Nagumo type equations, *Nonlinearity*, Vol.28, 2015, 1003-1016. 査読有, Doi:10.1088/0951-7715/28/4/1003
- ② M. Maeda, K. Suzuki, Concentration of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem in thin domains, *Journal of Math. Anal. Appl.* Vol.411, 2014, 465-484, 査読有, Doi:10.1016/j.jmaa.2013.09.036

- ③ M. Kuwamura, Stability of coexisting equilibrium of prey-predator systems with dormancy of predators, *Funkcialaj Ekvacioj*, 査読有 vol.57, 2014, 339-350, <http://www.math.kobe-u.ac.jp/~fe/vol57/fe57-2.html>
- ③ C.-N. Chen, S.-Y. Kung, Y. Morita, Planar standing wavefronts in the FitzHugh-Nagumo equations, *SIAM Math. Anal.* Vol.46, 2014, 657-690, 査読有, Doi:10.1137/130907793
- ④ S. Jimbo, Y. Morita, Lyapunov function and spectrum comparison for a reaction-diffusion system with mass conservation, *J. Differential Equations*, Vol.255, 2013, 1657-1683, 査読有, Doi:10.1016/j.jde.2013.05.021
- ⑤ A. Marciniak-Czochra, G. Karch, K. Suzuki, Unstable patterns in reaction-diffusion model of early carcinogenesis, *J. Math. Pures Appl.* Vol.99, 2013, 509-543, 査読有, Doi.org/10.1016/j.matpur.2012.09.011
- ⑥ Y. Morita, Nonplanar traveling waves of a bistable reaction-diffusion equation in the multi-dimensional space, *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, B35, 2012, 1-8. 査読有, [http://ci.nii.ac.jp/vol\\_issue/nels/AA12196120/ISS0000484522\\_ja.html](http://ci.nii.ac.jp/vol_issue/nels/AA12196120/ISS0000484522_ja.html)

[学会発表] (計 10 件)

- ① Kanako Suzuki, Turing instability and spatial patterns to reaction-diffusion equations modeling biological pattern formation, Mini-workshop on Models of Directional Movement and their Analysis (招待講演), 2015年3月26日～28日 川合ホール, 東北大学
- ② 森田善久、変分的構造をもつ反応拡散系と安定性解析、RIMS 研究集会「パターンダイナミクスと界面ダイナミクスの数理」(招待講演)、2015年1月6日～8日、京都大学数理解析研究所
- ③ 森田善久、反応拡散系における保存則とパターン形成、2014年度応用数学合同研究集会 (招待講演)、2014年12月18日～20日、龍谷大学瀬田キャンパス
- ④ Yoshihisa Morita, Gradient-like

property and spectral comparison in a mass-conserved reaction-diffusion system, The 10<sup>th</sup> AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (招待講演) 2014年7月7日~14日, Universidad Autonoma de Madrid, Madrid, Spain

- ⑤ Kanako Suzuki, Instability and blowup phenomena induced by diffusion in some reaction-diffusion-ODE system, RIMS Workshop on Mathematical Analysis of Pattern Formation Arising in Nonlinear Phenomena, (招待講演), 2013年10月30日~11月1日, 京都大学数理解析研究所
- ⑥ 鈴木香奈子, 非核酸物質を含む反応拡散系を用いてパターン形成を考える、2013年度日本数学会秋季総合分科会 応用数学分科会特別講演 (招待講演)、2013年9月24日~27日、愛媛大学
- ⑦ Yoshihisa Morita, Spectral comparison and gradient-like property for some reaction-diffusion systems, Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2013 (招待講演), 2013年9月5日~8日, 明治大学中野キャンパス
- ⑧ Yoshihisa Morita, Spectrum comparison for reaction-diffusion systems, Equadiff 13 (招待講演), 2013年8月26日~30日, Charles University in Prague, Czech Republic
- ⑨ Yoshihisa Morita, Gradient-like property of a reaction-diffusion system with mass conservation, The 9<sup>th</sup> AIMS Conference on Dynamical Systems and Differential Equations and Applications, (招待講演) 2012年7月1日~5日, Orland, Florida, USA.
- ⑩ Kanako Suzuki, Stability of patterns in some reaction-diffusion systems with the diffusion-driven instability, The 9<sup>th</sup> AIMS Conference on Dynamical Systems and Differential Equations and Applications, (招待講演) 2012年7月1日~5日, Orland, Florida, USA.

[産業財産権]  
○出願状況 (計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
取得年月日:  
国内外の別:

[その他]  
ホームページ等

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

森田 善久 (MORITA, Yoshihisa)  
龍谷大学・理工学部・教授  
研究者番号: 10192783

##### (2) 研究分担者

鈴木 香奈子 (SUZUKI, Kanako)  
茨城大学・理学部・准教授  
研究者番号: 10451519

桑村 雅隆 (KUWAMURA, Masataka)  
神戸大学・人間発達環境学研究科・教授  
研究者番号: 30270333  
(追加: 平成26年7月8日)

[図書] (計1件)

桑村雅隆著、パターン形成と分岐理論、共立出版、2015、209