様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 ２３ 日現在

機関番号：３４３１５
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2012～2013
課題番号：２４６５６０５７
研究課題名（和文）非線型媒質中の偏光伝搬のゲージ理論

研究課題名（英文）Gauge theory of polarized light in nonlinear birefringent media

研究代表者
倉辻　比呂志（Kuratsuji, Hiroshi）

立命館大学・理工学部・教授

研究者番号：３０１７８０９０
交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　700,000円、（間接経費）　　210,000円

研究成果の概要（和文）：偏光の場が変形の場としてのゲージ場と結合した場合のラグランジアンの分析を解析的側面から行った。偏光の場をスピノル場とみて角度変数の表示を用いることにより偏光の場が弾性場と同じ形に帰着されることが要になる。これによってラグランジアンは「曲（bending)」と「捻れ(twisting)」の２つの項で表される。ここで後者は、もともとのゲージ場を吸収し一般化されたゲージ場によって表される。これによってラグランジアンはストークス変数を用いることによって、さらに物理的構造がいっそう明確になることがわかった。とくに一般化されたゲージ場がゼロになる場合ストークス変数の場に対する非線形シグマ模型に帰着される。

研究成果の概要（英文）：A field equation is studied for the light polarization in anistropic media that incorporates the gauge structure. The field of polarization is realized by a spatial distribution of the Stokes vectors which is naturally deduced from the two-component Schroedinger type equation. The field equation can be extended so as to include the coupling with the gauge field. The evolution equation is derived for the Stokes parameter (pseudo-spin) field by constructing the effective Lagrangian, which is similar to the equation of motion of texture in anistropic fluid; superfluid He3 or liquid crystal; the Lagrangian consists of two terms: "bending" and "twisting" in analogy with elastic theory. The resultant Lagrangian is reduced to a form of the nonlinear sigma model, which suggests the topological nature of the light polarization.

研究分野：工学

科研費の分科・細目：応用物理学，工学基礎，応用光学，量子光工学

キーワード：非線形光学　偏光　ゲージ場　ストークス変数　シグマ模型

様式 C-19, F-19, Z-19 （共通)

1. 研究開始当初の背景

異方性媒質中の偏光伝搬の研究は長い歴史をもつが, 現在においても量子コンピュータなどと関連して 依然としてその重要性が認識されている. 偏光伝搬の研究は媒質の特性から「線形媒質」と「非線形媒質」の２つのカテゴリーに大別してなされてきた. ここで注目すべきは, 媒質それ自体の「力学的自由度」としての側面が十分に認識されてこなかったことである. 一方, 報告者は過去１０数年にわたり, 偏光伝搬の理論を線形および非線形複屈折の観点から研究をすすめてきた. この研究の要は２成分シュレディンガー型方程式である.

2. 研究の目的

媒質の力学的自由度の典型例は, 「光弾性」において発生する「変形の場」である. 報告者は, 光の場が存在する状況において, 変形場が「電磁場」と類似のゲージ場で記述される可能性に着目した. この事実にもとづき, 「偏光の場」と「変形場」の相互作用が, ゲージ原理で確定的に記述される可能性がでてくる. 以前に提案された２成分シュレディンガー方程式はスピノルで記述されることに注目し, 非線形複屈折媒質における「偏光の場」と「ゲージ場」の相互作用系に対する理論的枠組みを構築することが本研究の目的である.

3. 研究の方法

われわれによって定式化されてきた非線形媒質の偏光場に対する「近軸近似」(以下本文を参照）によるマクスウェル・シュレディンガー型方程式の手法を改良するところが主な手法となる. すなわち, 以前にやられた単一モード近軸近似を偏光伝搬方向に垂直な平面の座標依存性をもたせて, (２＋１）次元シュレディンガー型方程式に帰着させることが出発点となる.

4. 研究成果

(1) 2 成分波動方程式

理論構成の出発点は, $\mathbf{E}$ を 電場として, それに対するヘルムホルツ方程式 [文献１] である:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + \nabla^2 \mathbf{E} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{\epsilon}\mathbf{E} = 0 \tag{1}$$

波動の伝搬に対して, つぎのような設定を行う: z を波動の進行方向として, (x, y) は z に垂直な平面の座標にとる. さらに, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\right)$. 誘電テンソル $\hat{\epsilon}$ は, 一般に非線形性を反映している. すなわち, それは場の依存性をもっている (以下ではあらわな表式はあたえない）. さらに, $\hat{\epsilon}$ は波動ベクトル k に比して「ゆっくり」としている：および, z 軸が誘電テンソルの主軸のひとつであるとする配置を採用する. この幾何的配置のもとで, $\hat{\epsilon}$ は 2×2 行列で与えられる.

$\mathbf{E}$ をつぎのように表そう：

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{f}(x, y, z)\exp[ikn_0 z] \tag{2}$$

ここで, $k = \frac{\omega}{c}$, かつ $n_0 (\equiv \sqrt{\epsilon_0})$ は基準となる等方媒質の屈折率をあらわす. 振幅 $\mathbf{f}(x, y, z)$ は, (x,y) 平面内で横波振動をしていることを考慮すれば,

$$\mathbf{f} = {}^t(f_1, f_2) = f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2 \tag{3}$$

と表示される. ここで $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ は直線偏光基底をあらわす. 近軸近似 [文献 2] のもとで, f は z に関する「ゆっくり変化する (slowly varying)」関数とみられるので, これから

$$\left|\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial z^2}\right| << k\left|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\right|$$

という不等式が成立する. (2) を (1) に代入して, うえの $\mathbf{f}$ に対する不等式を用いると, 1 次の微分 $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}$ のみ, かつ, (x, y) に関するラプラシアンを残しておけば, 結局, 変調関数 f に対して

$$i\lambda\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} + \left[\frac{\lambda^2}{n_0^2}\nabla^2 + \left(\hat{\epsilon} - n_0^2\right)\right]\mathbf{f} = 0 \tag{4}$$

が得られる. ここで λ は波長を 2π でわったものである. この方程式は２成分シュレディンガー型方程式とみなすことができる. ２つの成分 (f_1, f_2) が互いに結合して, これによって偏光の変化を記述が可能になる. 複屈折の効果は 2×2 行列で表現される “ポテンシャル” $\hat{v} = \hat{\epsilon} - n_0^2$ で与えられる. $\hat{v}$ は等方的な値からの差で, エルミート行列となる. エルミート性を考慮すると, $\hat{v}$ の一般的な形は

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} v_0 + \alpha & \beta + i\gamma \\ \beta - i\gamma & v_0 - \alpha \end{pmatrix}. \tag{5}$$

と表される. ここで, 直線偏光基底から円偏光基底への変換: $(\mathbf{e}_+, \mathbf{e}_-) = T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$:

$$\Psi = T\mathbf{f} = {}^t(\psi_1, \psi_2) \tag{6}$$

を用いよう. T はユニタリー変換で

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

で与えられる. このようにして, シュレディンガー型方程式は Ψ に対して:

$$i\lambda\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \left(-\frac{\lambda^2}{n_0}\nabla^2 + V\right)\Psi \equiv \hat{H}\Psi \tag{7}$$

と書き直され「変換された」ハミルトンは $\hat{H} = ThT^{-1}$. となる. この２成分波動方程式は非線形光学で知られている１成分の非線形シュレディンガー方程式の自然な拡張になっている [文献 3,4].

(2) ゲージ場の導入

量子力学の手法に準じて, ラグランジアンを以下のように導入しよう：

$$
\begin{aligned}
I &= \int \Psi^\dagger \left(i\lambda \frac{\partial}{\partial z} - \hat{H} \right) \Psi d^2 x dz \\
&\equiv \int (L_C - H) dz
\end{aligned} \tag{8}
$$

L_C および H は, それぞれカノニカル項（canonical term ）および, ハミルトニアン項（Hamiltonian term ）とよばれる．ハミルトニアン項は「運動エネルギー」項とポテンシャルエネルギー項で書かれる．

ここで, ゲージ原理を採用する: まず, ラグランジアンが大局的（global) なゲージ変換 $\Psi \to \exp[i\alpha]\Psi$ (α は空間依存性がない一定の位相）で不変であることに注意する．この不変性を局所的に拡張する: すなわち, もし α が空間の局所的な関数であることを許容したとすれば, 新たな場 $\mathbf{A}$ （これがゲージ場である）を導入する必要がある．ゲージ場は, 通常の手続き [文献 5] に従って, 共変微分によって導入される:

$$\nabla \to \nabla - i\mathbf{A}$$

これから, 偏光場のハミルトニアンはつぎのように与えられる:

$$H = \int \Psi^\dagger \{ -\frac{\lambda^2}{n_0} (\nabla - i\mathbf{A})^2 \Psi + V \} \Psi d^2 x. \tag{9}$$

これに加えて, ゲージ場自体を力学的自由度とみれば, それに対するラグランジアンを加える必要がある．その最も簡単な形は通常の電磁場との類似から, 以下のように与えられる：

$$L_A = \int (\nabla \times \mathbf{A})^2 d^2 x \tag{10}$$

(3) 角度変数による有効作用とストークス変数への変換

スピノル表現 [文献 6] を用いて 2 成分波動関数を書き直す:

$$
\begin{aligned}
\psi_1 &= \sqrt{S_0} \cos\frac{\theta}{2} \exp[-i\frac{(\phi+\chi)}{2}], \\
\psi_2 &= \sqrt{S_0} \sin\frac{\theta}{2} \exp[i\phi] \exp[i\frac{(\phi-\chi)}{2}]
\end{aligned} \tag{11}
$$

（これはつぎのようにも表示される: $(\psi_1, \psi_2) = U(\theta, \phi, \chi)\Psi_0$, $\Psi_0 = (1, 0)$ かつ, U a unitary matrix）．さらに, これを $\Psi = f\psi$ ($f = \sqrt{S_0}$) と書くと

$$\psi = (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\exp[i\phi]) \exp[-i\frac{(\phi+\chi)}{2}] \tag{12}$$

と表せる．Ψ に対するラグランジアンは, 極表示を使って書き直される: まず, カノニカル項 L_c は

$$L_c = f^2 \lambda (\dot{\chi} + \cos\theta \dot{\phi}) \tag{13}$$

さらに, 運動エネルギー項は

$$
\begin{aligned}
(\nabla + i\mathbf{A}\Psi^\dagger)(\nabla - i\mathbf{A})\Psi &= (\nabla f)^2 + f^2 \nabla\psi^\dagger \nabla\psi \\
&+ i\mathbf{A}(\psi^\dagger \nabla\psi - c.c) + \mathbf{A}^2
\end{aligned}
$$

となり, これは 2 つの項の和で与えられる；$\mathcal{K} = \mathcal{K}_b + \mathcal{K}_{tw}$; それらは, それぞれ,「曲げ」の項（*bending*) and 「捻れ」の項（*twisting*) [文献 7] とよばれる.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_b &= \frac{\lambda}{4n_0} \{ (\nabla\theta)^2 + \sin^2\theta (\nabla\phi)^2 \} \\
\mathcal{K}_{tw} &= \frac{\lambda}{n_0} (\nabla\chi + \cos\theta \nabla\phi - \mathbf{A})^2
\end{aligned} \tag{14}
$$

ここで,「カレント」を導入する:

$$\mathbf{J} = \nabla\chi + \cos\theta\nabla\phi - \mathbf{A} \tag{15}$$

これによって, ゲージ場のエネルギーは

$$\int (\nabla \times \mathbf{A})^2 = (\mathbf{J} - \nabla \times \Omega)^2 \tag{16}$$

表せる．ただし, $\Omega = \nabla\chi + \cos\theta\nabla\phi$ とおいた．さらに, ストークス変数を導入しょう:

$$S_i = \psi^\dagger \sigma_i \psi, S_0 = \psi^\dagger 1 \psi \tag{17}$$

ただし, $i = x, y, z$ [文献 2, 8]. 関係式 $S_0^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ が成立することを注意する．すなわち偏光の場の強さを表す: $S_0 \equiv |\mathbf{E}|^2$. 角度変数を用いると

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S} &\equiv (S_x, S_y, S_z) \\
&= (S_0 \sin\theta\cos\phi, S_0 \sin\theta\sin\phi, S_0\cos\theta).
\end{aligned} \tag{18}
$$

1. 偏光が固定された場合

うえの有効ラグランジアンを特殊な場合に考察しよう: まず, $\theta = \frac{\pi}{2}$, かつ $\phi = \text{constant}$. この場合, ストークスベクトルは $\mathbf{S} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$ となる．ハミルトニアンは

$$H = \frac{\lambda^2}{n_0} [(\nabla f)^2 + f^2 (\mathbf{A} - \nabla\chi)^2] + (\nabla \times \mathbf{A})^2 + V(f) \tag{19}$$

によって与えられる． ここで, modified ベクトルポテンシャル：$\mathbf{B} = \mathbf{A} - \nabla\chi$ を導入する．位相が非特異であれば, $\nabla \times (\nabla\chi) = 0$ が成立するので, これから H の最初の項は

$$\tilde{H} = \frac{\lambda^2}{n_0} [(\nabla f)^2 + f^2 \mathbf{B}^2] + (\nabla \times \mathbf{B})^2 \tag{20}$$

となる．$\mathbf{B}$ に関する変分をとることにより

$$\nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{j} \tag{21}$$

を得る．ただし, $\mathbf{G} = \nabla \times \mathbf{B}$; これは磁場の類似である．カレントは, 次のようになる:

$$\mathbf{j} = \Psi^\dagger (\nabla - i\mathbf{A})\Psi = f^2 \mathbf{B} \tag{22}$$

この表式はアンペールの法則の対応物である．ここで, $f \to f_0$ の場合を考えると, $\mathbf{j} = f_0^2 \mathbf{B}$. これから

$$\nabla \times \mathbf{j} = -\mathbf{G} \tag{23}$$

が帰結する．ただし $\nabla \times (\nabla \times \chi) = 0$ を用いた．Eq.(23) は、ロンドン方程式の対応物に他ならない．

プロファイル関数 f および, ゲージ場 $\mathbf{A}$ の具体的な形状を求めるために, ポテンシャル V の形が必要であるが, これは, たとえば, ランダウーギンツブルク形

$$V(f) = k(f^2 - f_0^2)^2$$

を採用することによって実現される．f および $\mathbf{A}$ に対して

$$f = F(r), \mathbf{A} = G(r)\hat{\theta}$$

（θ は動径方向に垂直な単位ベクトルを表す）なる Ansatz を設定すれば, $F(r), G(r)$ に対する連立常微分方程式が得られる．この方程式を解くためには数値計算が必要となるが, この詳細は別途遂行中である．

2. 非線形シグマ模型

つぎに, f は一定の場合を考察する．以下では, 議論の簡単のためにポテンシャルは考えない．このとき

$$\mathcal{K} = \frac{\lambda^2}{n_0}[(\nabla \mathbf{S})^2 + \mathbf{J}^2 + (\nabla \times \mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{\Omega})^2] \tag{24}$$

ここで, 関係式

$$\nabla \times \Omega = S_0 \sin\theta(\nabla\theta \times \nabla\phi) = \mathbf{S} \cdot (\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y}) \tag{25}$$

に注意する．これは超流動 He3A において知られている, いわゆる Mermin-Ho 関係式である [文献 9]．２次元平面で積分することにより, 位相不変量

$$N = \int_{S^2} \sin\theta d\theta \wedge d\phi \tag{26}$$

が帰結する．うえの簡約化されたハミルトニアンはカレント $\mathbf{J}$ とストークスベクトル $\mathbf{S}$ の結合を記述している．特殊な場合として $\mathbf{J} = 0$ を考える（すなわち カレントがゼロの場合）これから, ストークスベクトルのみで書かれるハミルトニアンが得られる:

$$\mathcal{H} = \frac{\lambda^2}{n_0}[(\nabla \mathbf{S})^2 + \{\mathbf{S} \cdot (\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y})^2\} \tag{27}$$

ストークスベクトル（あるいは 疑スピン）に対するプロファイルをみてみよう．具体的に, 渦（vortex) 型の解を想定する．角度 ϕ はつぎのように与えられる：$\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ かつ

$$\sin\theta(\nabla\theta \times \nabla\phi) = \frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr}(\hat{r} \times \hat{\theta})$$

に注意する（$\hat{\theta}$ は動径方向単位ベクトル $\hat{r}$ に垂直な単位ベクトル）．θ が r のみに依存するという Ansatz を設定すると, かつ $\nabla\theta = \frac{d\theta}{dr}\hat{r}$ および $\nabla\phi = (-\sin\theta, \cos\theta)$, を用いると

$$H = \int \frac{\lambda^2}{n_0}[(1 + \frac{1}{r^2}(\frac{d\theta}{dr})^2 + \frac{1}{r^2}\sin^2\theta]rdr = \int_0^R \mathcal{L}dr \tag{28}$$

が得られる．最後に変分方程式 $\delta\int_0^R \mathcal{L}dr = 0$ より, $\theta(r)$ に対する非線形微分方程式が導かれる．これの解を求めるには数値的に扱う必要があるが, 詳細は現在遂行中である [文献 10]．

文献

１：L. Landau and E. Lifschitz, *Electrodynamics in Continuous Media*, chapter 11, Course of Theoretical Physics Vol.8 (Pergamon Oxford, 1968).

２：H. Kuratsuji and S. Kakigi, Phys. Rev. Lett. **80**, (1998) 1888.

3: R. Y. Chiao, E. Gamire, and C. H. Townes, Phys. Rev. Lett. **13**(1964)479

4: G. A. Swartzlander, Jr. and C. T. Law, Phys. Rev. Lett. **69**(1992)2503.

5: C.N.Yang and R.Mills, Phys.Rev.**96**(1954)191.

6: L.D.Landau and E.M.Lifschitz, *Quantum Mechanics*, Course of Theoretical Physics, vol.3.

7: L.D.Landau and E.M.Lifschitz, *Elastic Theory*, Course of Theoretical Physics, vol.7.

8: C.Brosseau, *Fundamental of Polarized Light: A Statistical Optics Approach*, Chapter 3, (John Wiley, New York, 1998).

9: D.Mermin and T.L.Ho, Phys.Rev.Lett.**36**(1976)594.

10: H.Kuratsuji, in preparation.

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　3　件）

(1) 著者名： Hiroshi Kuratsuji
標題： Stochastic theory of an optical vortex in nonlinear media.
雑誌名：Physical Review E (アメリカ物理学会）, 査読有, 巻 88, 発行年 2013, ページ: 013202- 013210

(2) 著者名： Hiroshi Kuratsuji
標題： Geometric phase accompanying SU(2) coherent states for quantum polarized light.
雑誌名：Physical Review A （アメリカ物理学会), 査読有, 巻 88, 発行年 2013, ページ: 033801-033809

(3) 著者名： Hiroshi Kuratsuji
標題：Evolution Equation for Polarized Light: Analogy with Elastic Theory.
雑誌名：立命館大学理工学研究所紀要, 査読無, 巻 72, 発行年 2013, ページ：25-28

〔学会発表〕（計 0　件）

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

6. 研究組織

(1) 研究代表者
倉辻　比呂志（Kuratsuji, Hiroshi）
立命館大学・理工学部・教授　研究者番号：30178090
(2) 研究分担者　なし