

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 21 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(A)

研究期間：2012～2015

課題番号：24684003

研究課題名(和文) 極小モデル理論と特異点の有界性問題

研究課題名(英文) Boundedness problems on the minimal model program and singularities

研究代表者

川北 真之(KAWAKITA, Masayuki)

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：10378961

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 8,200,000円

研究成果の概要(和文)：極小対数的食違い係数の昇鎖律を，de Fernex, MustataとKollarの生成極限を用いて研究した．多様体とイデアルの指数が指定された時の，対数的標準な組の対数的食違い係数全体の集合の離散性を示し，局所完全交叉特異点の極小対数的食違い係数の昇鎖律を得た．イデアルの指数が動く時も，3次元非特異多様体上の1より大きい極小対数的食違い係数の昇鎖律を示した．また係数のイデアル進半連続性を曲面の場合に証明した．特異点の有界性問題として，真の3次元標準特異点のGorenstein指数は6以下であることを示した．

研究成果の概要(英文)：I studied the ACC for minimal log discrepancies, using generic limits introduced by de Fernex, Mustata and Kollar. I proved the discreteness of log discrepancies over all log canonical pairs for a fixed variety and fixed exponents, and obtained the ACC for minimal log discrepancies on local complete intersection singularities. Even when the exponents are not fixed, I proved the ACC for minimal log discrepancies greater than 1 on smooth 3-folds. Also, I showed the ideal-adic semi-continuity of minimal log discrepancies on surfaces. As a boundedness problem of singularities, I proved that the index of a 3-fold strictly canonical singularity is at most 6.

研究分野：代数幾何学

キーワード：極小対数的食違い係数 昇鎖律 生成極限 イデアル進半連続性 連結性補題 標準特異点 対数的標準特異点

1. 研究開始当初の背景

双有理幾何学は、双有理変換で写り合う多様体は性質を共有するという見地から代数多様体を研究する。極小モデル理論は各双有理同値類から代表的な多様体を標準因子の比較によって抽出する理論であり、現在、極小モデルプログラム(MMP)として定式化されている。対象を多様体と因子の組へと広げる拡張操作は対数化と呼ばれ、拡張されたMMPが対数的極小モデルプログラム(LMMP)である。

LMMPはフリップの存在と終止が示されて初めて完成する。3次元では森が本来のMMPを完成させ、その後主にShokurovの努力で3次元LMMPは完全なものとなった。近年Birkar, Cascini, Hacon, McKernanは境界因子が巨大であるときのLMMPを機能させて一般次元でフリップの存在を証明し、高次元極小モデル理論は俄かに新展開を迎えた。目下フリップの終止予想が最重要な課題である。

2. 研究の目的

私の当面の研究目標は、終止予想の視点からの、LMMPの過程で現れる特異点の有界性問題である。LMMPで許される特異点は極小対数的食違い係数によって定義されるが、高次元では定義以上の性質は十分研究されていない。私が掲げる特異点の有界性とは、極小対数的食違い係数及びその一般化の有界性である。

極小対数的食違い係数を探求する理由は、フリップの終止予想がShokurovによって極小対数的食違い係数の下半連続性と昇鎖律という二つの局所的問題に還元されているからである。

3. 研究の方法

極小対数的食違い係数の有界性問題を、モチーフ積分論の代数的視点と極小モデル理論の幾何的視点の両面から考察する。

ジェット空間は、特異点の程度が悪いほど大きくなるという点で、特異点の情報を内包している。私は埋込次元の制限から極小対数的食違い係数の有界性を導出しているが、その高次化としてジェット空間の制御を探求する。

一方、極小対数的食違い係数のイデアル進半連続性についての私の結果を発展させる。イデアル進半連続性とは、境界因子を微小変形させるときの極小対数的食違い係数の不変性であり、下半連続性と昇鎖律の両方と関係する。私の結果は、de Fernex, Ein, Mustață と Kollár の対数的標準閾のイデアル進半連続性と、モチーフ積分論におけるヤ

コピアン の 重複度の評価を組み合わせ得られる。その融合を推し進めて、有界性問題と結び付く形でのイデアル進半連続性の理解を目指す。

消滅定理は標準因子 K と豊富因子 H の和 $K+H$ に付随するコホモロジーの消滅を意味するゆえ、 K 自身の情報よりむしろ商 K/H の情報を提供する。 K/H に対応する不変量が極小対数的食違い係数を重複度で割った商にあたる対数的標準閾である。対数的標準閾の次元による有界性は自明なので、それからいかに極小対数的食違い係数自身の有界性を引き出すかが問題となる。

4. 研究成果

(1) de Fernex, Mustață と Kollár が導入したイデアルの生成極限を利用して、非特異多様体上の極小対数的食違い係数の昇鎖律を研究した。

生成極限とは、非特異多様体上のイデアルの列の極限として形式的べき級数環上に定まるイデアルである。de Fernex, Ein, Mustață と Kollár はそれを対数的標準閾の昇鎖律へ応用させた。私は彼らの議論を極小対数的食違い係数の場合に定式化し、さらに係数の性質を導くために、イデアルの指数を小さく動かすことで対数的標準閾の結果を応用することを考えた。その結果、多様体とイデアルの指数が指定された時の、対数的標準組の対数的食違い係数全体の集合の離散性を証明した。系として、局所完全交叉特異点の極小対数的食違い係数の昇鎖律が得られた。

イデアルの指数が動く時の非特異多様体上の極小対数的食違い係数の昇鎖律は、生成極限が与える極小対数的食違い係数が元々の殆どのイデアルが与える係数と一致するという予想から従う。

形式的べき級数環上では、標数0の双有理幾何の基本定理である小平消滅定理が知られていない。小平消滅定理は代数的主張であるが、私はその幾何的応用であるShokurov, Kollárの連結性補題を形式的べき級数環上で考えた。さらに3次元の研究を深めて、3次元形式的べき級数環上の対数的標準特異点の最小対数的標準中心の存在と正規性を証明した。これと私のイデアル進半連続性の研究を組み合わせ、3次元において生成極限が与える極小対数的食違い係数が1より大きいとき、上述の係数一致の予想を証明した。系としてイデアルの指数が動く時も、3次元非特異多様体上の1より大きい極小対数的食違い係数の昇鎖律が得られた。

極小対数的食違い係数のイデアル進半連続性について、純対数的端末特異点の適当

な設定では私が以前に示している．その証明のうち，望まれる対数的標準特異点への拡張が機能する部分を精査して，半連続性を曲面の場合に完全に証明した．

さらに高次元化を目指すには，対数的な組の境界を増加させていくときに極小対数的食違い係数を計算する因子がどのように移り変わるかを理解することが課題となる．先ずは非特異曲面上の係数を計算する因子を調べた．

(2) 一方，特異点の有界性問題として，真の3次元標準特異点の Gorenstein 指数は6以下であるという，Shokurov の予想を証明した．系として，3次元標準特異点の極小対数的食違い係数を固定した時，Gorenstein 指数の有界性を明示的に与えた．私が昔に行った3次元因子収縮写像の分類の鍵である Reid の特異点版 Riemann-Roch 公式を応用する手法が証明に用いられている．

5．主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

Masayuki Kawakita, A connectedness theorem over the spectrum of a formal power series ring, *International Journal of Mathematics* **26**, No. 11, Article ID 1550088, 27p. (2015), refereed
DOI:10.1142/S0129167X15500883

Masayuki Kawakita, The index of a threefold canonical singularity, *American Journal of Mathematics* **137**, No. 1, 271-280 (2015), refereed
DOI:10.1353/ajm.2015.0006

Masayuki Kawakita, Discreteness of log discrepancies over log canonical triples on a fixed pair, *Journal of Algebraic Geometry* **23**, No. 4, 765-774 (2014), refereed
DOI:10.1090/S1056-3911-2014-00630-5

Masayuki Kawakita, Ideal-adic semi-continuity of minimal log discrepancies on surfaces, *Michigan Mathematical Journal* **62**, No. 2, 443-447 (2013), refereed
DOI:10.1307/mmj/1370870381

Masayuki Kawakita, Ideal-adic semi-continuity problem for minimal

log discrepancies, *Mathematische Annalen* **356**, No. 4, 1359-1377 (2013), refereed
DOI:10.1007/s00208-012-0885-y

Masayuki Kawakita, Supplement to classification of threefold divisorial contractions, *Nagoya Mathematical Journal* **206**, 67-73 (2012), refereed
DOI:10.1215/00277630-1548493

[学会発表](計13件)

Masayuki Kawakita, On the ACC conjecture for minimal log discrepancies, "NCTS workshop in algebraic geometry at CCU", National Chung Cheng University, Taiwan, 29 March 2016

Masayuki Kawakita, Minimal log discrepancies, "2016 NCTS mini-course in algebraic geometry", National Taiwan University, Taiwan, 18, 21 and 23 March 2016

Masayuki Kawakita, On minimal log discrepancies, "Singularities and invariants of higher dimensional algebraic varieties", Kyoto University, Japan, 17 December 2015

Masayuki Kawakita, On the ACC conjecture for minimal log discrepancies, "Workshop on algebraic geometry", Fudan University, China, 29 October 2015

Masayuki Kawakita, Minimal log discrepancies and generic limits, BICMR algebraic geometry seminar, Peking University, China, 27 and 29 May 2014

Masayuki Kawakita, A connectedness theorem over the spectrum of a formal power series ring, Algebraic geometric seminar, Kyoto University, Japan, 9 May 2014

Masayuki Kawakita, A connectedness theorem over the spectrum of a formal power series ring, "Geometry and arithmetic of surfaces", Ludwig Maximilians Universität und Technische Universität München, Germany, 18 March 2014

Masayuki Kawakita, A connectedness lemma on the spectrum of a formal

power series ring, "Complex geometry", National University of Singapore, Singapore, 5 August 2013

Masayuki Kawakita, The index of a threefold canonical singularity, "Workshop in algebraic geometry, London 2013", Imperial College London, UK, 22 May 2013

Masayuki Kawakita, The index of a threefold canonical singularity, "The commutative algebra of singularities in birational geometry: multiplier ideals, jets, valuations, and positive characteristic methods", Mathematical Sciences Research Institute, USA, 9 May 2013

Masayuki Kawakita, Ideal-adic semi-continuity of minimal log discrepancies, "Higher dimensional algebraic geometry", National Taiwan University, Taiwan, 25 March 2013

Masayuki Kawakita, Discreteness of log discrepancies over log canonical triples, "Higher dimensional algebraic geometry 2012", Kyoto University, Japan, 11 June 2012

Masayuki Kawakita, Discreteness of log discrepancies, "ACC for minimal log discrepancies and termination of flips", American Institute of Mathematics, USA, 17 May 2012

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~masayuki>

i

6 . 研究組織

(1)研究代表者

川北 真之 (KAWAKITA, Masayuki)

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：10378961

(2)研究分担者

無し

(3)連携研究者
無し