

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 28 日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究(A)

研究期間：2012～2015

課題番号：24684005

研究課題名(和文)特異点のミラー対称性の研究

研究課題名(英文)Study of Mirror Symmetry of Singularities

研究代表者

高橋 篤史(TAKAHASHI, ATSUSHI)

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：50314290

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 15,100,000円

研究成果の概要(和文)：ミラー対称性と呼ばれる代数学と幾何学の役割を入れ替える対称性のアイデアにより，特異点に対して代数学・表現論・幾何学に付随した3種類の平坦構造が定義される．カusp特異点に対して，代数学と幾何学に付随した平坦構造の同型，つまり古典的ミラー対称性を示した．また，原始形式の周期写像により，代数学と表現論に付随した平坦構造の同型も与えられた．さらに，ホモロジー的ミラー対称性と組み合わせることで，正多面体群に対応するオービフォルド射影直線に対するDubrovin予想も示した．

研究成果の概要(英文)：Based on the idea of Mirror Symmetry which interchanges the role of algebra and geometry, three kinds of flat structures (Frobenius structures) are associated to algebra, representation theory and geometry. For cusp singularities, we show the classical mirror symmetry, an isomorphism of the flat structure for algebra and geometry. We also show, by period mappings of the primitive form, an isomorphism of the flat structures for algebra and representation theory. Moreover, together with Homological Mirror Symmetry, the Dubrovin's conjecture holds for orbifold projective lines associated to rational polyhedral groups.

研究分野：数学

キーワード：幾何学 代数学 数理物理学 ミラー対称性

1. 研究開始当初の背景

ミラー対称性とは、リーマン面から多様体への正則写像の数え上げに対応する A 模型と複素多様体の変形理論に対応する B 模型という、2 つの位相的弦理論の等価性のことである。ミラー対称性は多様体の定性的および定量的な性質に関するさまざまな予想を与え、これまで個別に研究されてきた数学を結び付けるので極めて興味深い。これらの「物理的対象」を数学的に定式化して、ミラー対称性の背後にある「数学的真理」を解明するのは非常に重要な問題である。

ホモロジー的ミラー対称性予想は、「シンプレクティック幾何学的対象」と「複素代数幾何学的対象」の圏論的同値性こそがミラー対称性の本質、と主張する。ミラー対称性を解明して古典的諸問題に応用するには、カラビ-ヤウ多様体に限定しない、広い視野からの研究が必要である。

ミラー対称性研究の重要な基礎、位相的ミラー対をなす 7,555 個のカラビ-ヤウ多様体の発見は、特異点のミラー対称性にに基づきなされた。特異点のミラー対称性の複素幾何学的側面の研究は、80 年代中旬の特異点理論における行列因子化(Matrix Factorization)の概念と比較的新しい三角圏の解析手法である半直交分解を組み合わせて用いることで、堀氏・Orlov 氏・研究代表者らにより、近年急速に進展した。

また、特異点のミラー対称性のシンプレクティック幾何学的側面も、Seidel 氏による基礎的研究がある。Seidel 氏・Efimov 氏・研究代表者らにより群作用付きのカスプ特異点の研究が進展し、それとオービフォルド曲線とのミラー対称性現象が発見された。これらは、カラビ-ヤウ多様体のミラー対称性を自然に含む、応用の多い豊かな理論に発展するものと期待された。

これまで、Brieskorn 氏や齋藤恭司氏により特異点の爆発・変形とルート系・リー環との対応が研究され、多くのアイデアが育まれてきた。研究代表者は群作用付孤立超曲面特異点の古典的ミラー対称性の研究、とくに原始形式の理論および平坦構造の研究、を行ってきた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、離散群・特異点・ルート系・リー環・有限次元代数の間にある不思議な関係を解明するため、とくにカスプ特異点のミラー対称性に着目し、それぞれ代数学・表現論・幾何学に付随した 3 種類の異なる背景を持つ三角圏・平坦構造の等価性を検証することである。

3. 研究の方法

上記の研究目的を達成するため、以下の方法で研究を行った。

- (1) オービフォルド曲線と群作用付きカスプ特異点のミラー対称性予想の解決を目指す。
- (2) カスプ下駄ルート系に対するワイル群不変式論を構築し、それから平坦構造を導出する。
- (3) カスプ特異点に付随する三角圏の構造解析、とくに安定性条件の空間の決定を目指す。

これらの内容を効率的に遂行するため、国内外の関連分野の研究集会に積極的に参加した。また、関連する国内・海外研究者の招へいを通じて研究交流を行った。

さらに、自らも研究集会を開催し、当該分野の最新の進展について、参加者がそれぞれの研究成果を発表し、活発な議論を行う機会を設けた。

4. 研究成果

上記の研究方法により、以下のような研究成果を得た。

- (1) 可逆多項式と呼ばれる重み付き斉次多項式とそれを不変にする対角的有限アーベル群の組に対する、位相的ミラー対称性予想を証明した。これまで、いくつかの部分的結果が知られていたが、ここでのものは完全に解決を行うだけでなく、対の不変量を導入することにより内容が豊富になり、なおかつ証明がかなり容易なものとなっているのが特徴である。

また、原点に孤立特異点を持つ多項式とそれを不変にする対角的有限アーベル群の組に対して、指数 (exponent) という不変量を定義した。これは、(群が自明である場合の) Steenbrink による古典的定義を自然な拡張したものである。幾何学的考察や群同変な行列因子化の圏の性質により、指数の集合の分散がオービフォルドミルナー数やオービフォルドオイラー標数による具体的表示を持つことが期待される。このことを多項式がカスプ多項式および可逆多項式の場合に証明を行った。

- (2) 「カusp特異点」と滑らかな射影直線を粗なモジュライ空間としてもつオービフォールド(オービフォールド射影直線)の古典的ミラー対称性予想の証明を行った。

具体的には、「カusp特異点」に対して原始形式を決定し、それがもたらす平坦構造の特徴づけを行った。とくに、この特徴づけにより逆に平坦構造が一意的に定まることを証明した。このことにより、対応するオービフォールド射影直線のグロモフ ウィッテン不変量から得られる平坦構造が同じ特徴づけを持つことを示すことで、古典的ミラー対称性、つまり二つの平坦構造の同型を証明した。

さらに、原始形式の存在・古典的ミラー対称性・ホモロジー的ミラー対称性を組み合わせることで、オービフォールド射影直線に対する Dubrovin 予想も得ることができた。

- (3) カusp型のルート系およびワイル群の詳細な研究を行った。原始形式の周期写像を考察し交差形式を求めることにより、カusp特異点の変形から得られる平坦構造と拡大アフィンワイル群の不変式論から得られる平坦構造との同型が得られた。

また、齋藤恭司による一般化ルート系の概念を圏論的観点から整備しなおし、オービフォールド射影直線から、導来圏を経由して、アフィン型・楕円型・カusp型のルート系が系統的に得られることを示した。さらに、拡大カuspワイル群および対応する Artin 群の、生成元と関係式による表示を与えた。結果として、このカusp型の Artin 群が、オービフォールド射影直線の余接束の(零切断に台を持つ)導来圏に作用することが示された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 13 件)

W. Ebeling, S. M. Gusein-Zade, A. Takahashi, Orbifold E-functions of dual invertible polynomials, Journal of Geometry and Physics, 印刷中, doi:10.1016/j.geomphys.2016.03.026, 査読有。

Y. Shiraishi, A. Takahashi, K. Wada, On Weyl Groups and Artin Groups Associated to Orbifold Projective Lines, Journal of Algebra, 453, (2016) 249-290, doi:10.1016/j.jalgebra.2015.12.016,

査読有。

Y. Shiraishi, A. Takahashi, On the Frobenius Manifolds for Cusp Singularities, Advances in Mathematics, 273 (2015), 485-522, doi:10.1016/j.aim.2014.12.019, 査読有。

Y. Ishibashi, Y. Shiraishi, A. Takahashi, A Uniqueness Theorem for Frobenius Manifolds and Gromov-Witten Theory for Orbifold Projective Lines, J. Reine Angew. Math., 702, (2015), 143-171, doi:10.1515/crelle-2013-0030, 査読有。

A. Basalaeu, A. Takahashi, On rational Frobenius Manifolds of rank three with symmetries, Journal of Geometry and Physics, 84, (2014), 73-86, doi:10.1016/j.geomphys.2014.05.030, 査読有。

W. Ebeling, A. Takahashi, A geometric definition of Gabrielov numbers, Revista Matemática Complutense, 27, (2014), 447-460, doi:10.1007/s13163-013-0139-x, 査読有。

A. Takahashi, オービフォールド射影直線のミラー対称性, 京都大学数理解析研究所講究録, 1918, (2014), 1-17, 査読無。

K. Iwaki and A. Takahashi, Stokes matrices for the quantum cohomologies of a class of orbifold projective lines, Journal of Mathematical Physics, 54, (2013), 101701, doi:10.1063/1.4823483, 査読有。

W. Ebeling, A. Takahashi, Variance of the spectra of orbifold Landau-Ginzburg models, Mathematical Research Letters, 20, (2013), 51-65, doi:10.4310/MRL.2013.v20.n1.a6, 査読有。

A. Takahashi, Mirror symmetry between orbifold projective lines and cusp singularities, Advanced Studies of Pure Mathematics, 66, (2013), 257-282, 査読有。

A. Takahashi, Algebra and Geometry of LG Orbifolds for Invertible Polynomials in Three Variables, Oberwolfach Reports, 44/2013, (2013), 41-44, doi:10.4171/OWR/2013/44, 査読無。

A. Takahashi, Mirror symmetry and strange duality for weighted homogeneous polynomials, 第44回環論および表現論シンポジウム報告集, (2012), 196-207, 査読無。

A. Takahashi, Mirror symmetry between orbifold projective lines and cusp singularities, Oberwolfach Reports,

[学会発表](計 28 件)

A. Takahashi, On the categorical entropy and the topological entropy, Oberseminar algebraic and algebraic geometry, (Leibniz University Hannover, GERMANY), 2016年1月27日.

A. Takahashi, From Calabi-Yau dg categories to Frobenius manifolds via primitive forms, String field theory of the B-model, (IBS-CGP, KOREA), 2016年1月9日.

A. Takahashi, On orbifold Jacobian Algebras for Invertible Polynomials, The 10-th Anniversary Tokyo-Seoul Conference in Mathematics -Algebraic / Arithmetic / Complex Geometry, 東京大学数理科学研究科, 2015年12月3日.

A. Takahashi, Introduction to the mirror symmetry between weighted projective lines and cusp singularities, Preprojective Algebras Interacting with Singularities, Cohen-Macaulay Modules and Weighted projective Spaces, (Casa Matematica Oaxaca, MEXICO), 2015年10月4日.

A. Takahashi, From Calabi-Yau dg categories to Frobenius manifolds via primitive forms, Categorical and analytic invariants in Algebraic geometry 1, (Steklov Mathematical Institute, RUSSIA), 2015年9月17日.

A. Takahashi, Mirror Symmetry for Orbifold Projective Lines, 連続講義, (Seoul National University, KOREA), 2015年4月14日・15日・16日.

A. Takahashi, Mirror symmetry for orbifold projective lines and extended cuspidal Weyl group, Geometry from stability conditions, (University of Warwick, UK), 2015年2月17日.

A. Takahashi, Orbifold projective lines and extended cuspidal Weyl group, Workshop on B-model aspects of Gromov-Witten Theory, (University of Michigan, USA), 2014年3月6日.

A. Takahashi, On the classical mirror symmetry of orbifold projective lines, RIMS 共同研究「ミラー対称性の展望」, 京都大学数理解析研究所, 2013年12月24日.

A. Takahashi, Weyl Groups and Artin Groups Associated to Weighted Projective Lines, Representations of Finite Dimensional Algebras Seminar at Bielefeld, (Universitat Bielefeld, GERMANY), 2013年12月11日.

A. Takahashi, Weyl Groups and Artin Groups Associated to Weighted Projective Lines, Perspectives of Representation Theory of Algebras, 名古屋大学多元数理科学研究科, 2013年11月15日.

A. Takahashi, Algebra and Geometry of LG orbifolds for invertible polynomials in three variables, Matrix Factorizations in Algebra, Geometry, and Physics, (Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach Schwarzwald, GERMANY), 2013年9月5日.

A. Takahashi, Mirror symmetry of orbifold projective lines and invariant theory of extended cuspidal Weyl groups, RIMS workshop 「Noncommutative Algebraic Geometry and Related Topics」, 京都大学数理解析研究所, 2013年7月2日.

A. Takahashi, Categories of Matrix Factorizations for Elliptic Landau-Ginzburg Orbifolds, Workshop on Matrix factorizations, (Universitat Wien, AUSTRIA), 2013年5月14日.

A. Takahashi, Mirror Symmetry of orbifold projective lines, 4-th Workshop on Higher Dimensional Algebraic Geometry, Taipei, 2013, (National Taiwan University, 台湾), 2013年3月26日.

A. Takahashi, From Calabi-Yau dg categories to Frobenius manifolds via primitive forms: a work in progress, UK-JAPAN MATHEMATICAL FORUM on Algebraic Geometry and Symplectic Geometry, 慶應義塾大学, 2013年1月27日.

A. Takahashi, Variance of the spectra of Orbifold Landau-Ginzburg models, The conference of Mirror Symmetry and Related Topics, (昆明科学技術大学, 中国), 2012年8月21日.

A. Takahashi, Classical Mirror symmetry between orbifold projective lines and cusp singularities, Workshop on Geometry and Physics of the Landau-Ginzburg Model, 東京大学国際高等研究所数物連携宇宙研究機構, 2012年6月27日.

A. Takahashi, Classical Mirror symmetry between orbifold projective lines and cusp singularities, Linking representation theory, singularity theory and non-commutative algebraic geometry, (Banff International Research Station, CANADA), 2012年5月11日.

A. Takahashi, Mirror symmetry between orbifold projective lines and cusp singularities, Singularity Theory and Integrable Systems, (Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach Schwarzwald, GERMANY), 2012 年 4 月 23 日.

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

高橋 篤史 (TAKAHASHI ATSUSHI)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号 : 50314290